Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 21: Osservabilità e ricostruibilità a tempo discreto

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

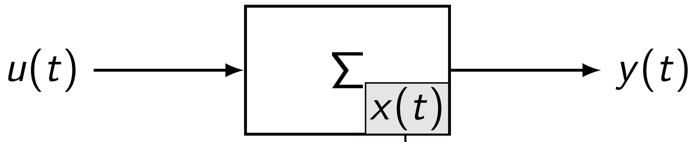

noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.

Osservabilità e ricostruibilità

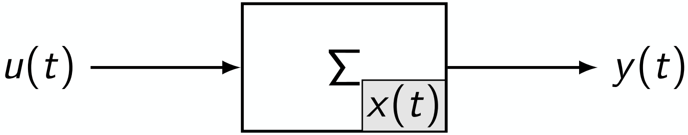
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



non è direttamente accessibile

Osservabilità e ricostruibilità

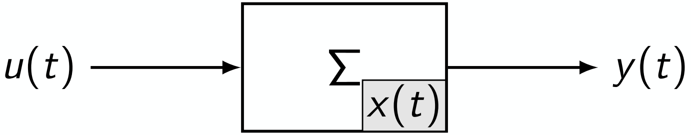
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Osservabilità $=$ possibilità di determinare lo **stato iniziale** $x_0 = x(t_0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

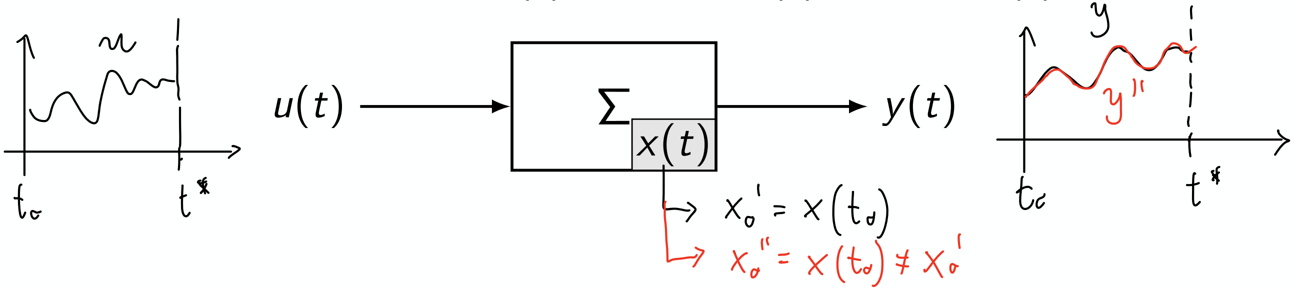


Osservabilità = possibilità di determinare lo **stato iniziale** $x_0 = x(t_0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Ricostruibilità = possibilità di determinare lo **stato finale** $x^* = x(t^*)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Stati indistinguibili e non osservabili

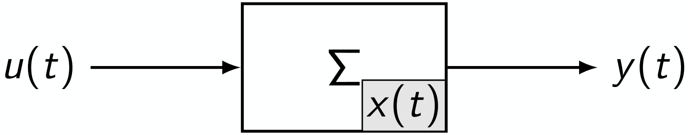
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato x_0' si dice indistinguibile dallo stato x_0'' in $[t_0, t^*]$ se, per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0''$ coincidono su $[t_0, t^*]$.

Stati indistinguibili e non osservabili

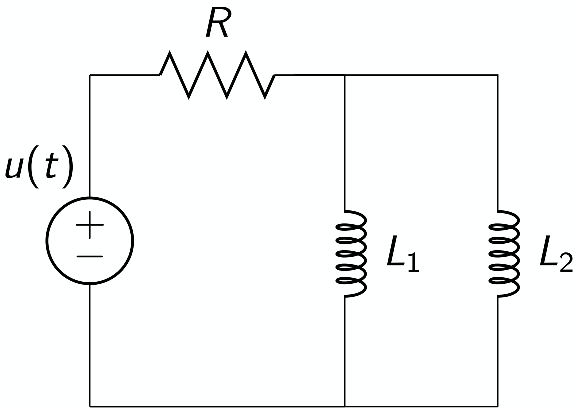
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato x_0' si dice indistinguibile dallo stato x_0'' in $[t_0, t^*]$ se, per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0''$ coincidono su $[t_0, t^*]$.

Definizione: Uno stato x_0 si dice non osservabile nell'intervallo $[t_0, t^*]$ se è indistinguibile dallo stato $x(t_0) = 0$.

Esempio introduttivo



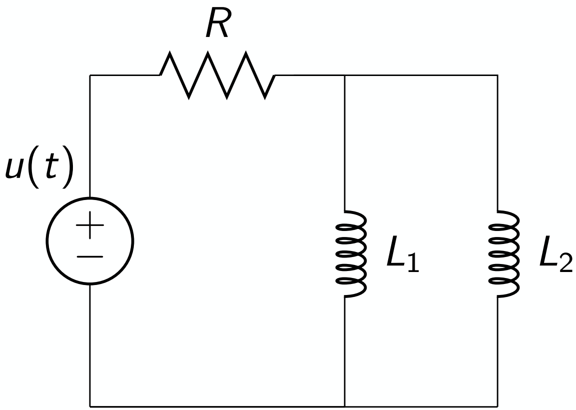
$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$t_0 = 0,\ L_1 = L_2 = L$$

note

Esempio introduttivo



$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$t_0 = 0,\ L_1 = L_2 = L$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \text{è non osservabile in } [0, t],\ \forall t > 0$$

note

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.

Osservabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\
y(t) &= Hx(t)
\end{aligned}
\qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n
$$

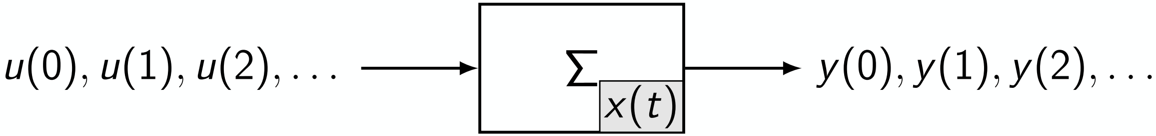
$$
u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(t) \in \mathbb{R}^p
$$

$$
y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k)}_{\text{evoluzione forzata}} = HF^t x_0 + H\mathcal{R}_t u_t
$$

$$
u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}
$$

Osservabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$\boxed{\text{Insieme di stati iniziali indistinguibili da } x_0 \text{ in } [0, t-1] \ (= \text{in } t \text{ passi})?}$$

$$\boxed{\text{Quando possiamo determinare univocamente } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ dalle misure?}}$$

Stati indistinguibili

$$x(0) = x_0: \quad y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$x(0) = x_0': \quad y'(k) = HF^k x_0' + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

note

Stati indistinguibili

$$x(0) = x_0: \quad y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = x_0': \quad y'(k) = HF^k x_0' + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y'(k) - y(k) = 0, \ \forall k \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq\, \mathcal{O}_t \,=\, \text{matrice di osservabilità in } t \text{ passi}} (x_0' - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_0' - x_0 \in \ker \mathcal{O}_t$$

$$\boxed{x_0 + \ker \mathcal{O}_t = \{x_0 + x, x \in \ker \mathcal{O}_t\} = \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0}$$

note

Spazio non osservabile

$$
\begin{aligned}
X_{NO}(t) &= \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0 = 0 \\
&= \text{insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\
&= \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)
\end{aligned}
$$

Spazio non osservabile

$$\begin{aligned} X_{NO}(t) &= \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0 = 0 \\ &= \text{insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\ &= \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t) \end{aligned}$$

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

Spazio non osservabile

$$\begin{aligned} X_{NO}(t) &= \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0 = 0 \\ &= \text{insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\ &= \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t) \end{aligned}$$

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = \text{(minimo) spazio non osservabile} = X_{NO}(n)$$

Criterio di osservabilità del rango

stati indistinguibili da x_0 :

$x_0 + \cancel{X_{NO}} = x_0$

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$X_{NO} = X_{NO}(n) = \ker \mathcal{O}_n$$

Criterio di osservabilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{®}\ \texttt{obsv}(\overset{F,\,H}{\texttt{sys}}))$$

$$\begin{array}{cc} & n \\ np & \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$X_{NO} = X_{NO}(n) = \ker \mathcal{O} = \{0\}$$

Criterio di osservabilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{®}\ \texttt{obsv(sys)})$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$p = 1: \ \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0 \qquad \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$p > 1: \ \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\underbrace{\mathcal{O}^\top \mathcal{O}}_{n \times n}) \neq 0 \qquad \mathcal{O}^\top \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Esempi

1. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

2. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

note

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\implies$ non osservabile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\implies$ osservabile (in 2 passi)

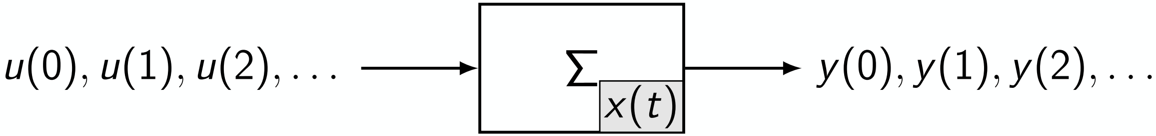
note

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.

Ricostruibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

Ricostruibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$u(0), u(1), u(2), \dots \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad \boxed{x(t)}} \longrightarrow y(0), y(1), y(2), \dots$$

$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

> Quando possiamo determinare univocamente $x^* = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

- Stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- Stati finali compatibili con le misure: $X_{t-1} = F^{t-1}(x_0 + X_{NO}(t)) + R_{t-1}u_{t-1}$

$$= \underbrace{F^{t-1}x_0 + R_{t-1}u_{t-1}}_{\substack{x^* = x(t-1) \\ \text{stato finale} \\ \text{"corretto"}}} + \underbrace{F^{t-1}X_{NO}(t)}_{\substack{\text{parte} \\ \text{indeterminata}}}$$

$X_{NR}(t)$ = spazio non ricostruibile in t passi

Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$

$$= x^* + F^{t-1}X_{NO}(t)$$

Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$
$= x^* + F^{t-1}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) =$ spazio non ricostruibile in t passi $= F^{t-1}X_{NO}(t) = \{F^{t-1}x, x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$

$X_{NR} =$ (minimo) spazio non ricostruibile $= X_{NR}(n+1) \overset{\wedge}{=} F^n X_{NO}$

$F^n X_{NO}(n+1) = F^n X_{NO}$

Criterio di ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$X_{NR} = X_{NR}(n+1) = F^n X_{NO}$$

$$X_{NR} = \{0\} \iff F^n X_{NO} = \{0\} \iff \underset{\displaystyle \ker \mathcal{O}}{\underset{\shortparallel}{X_{NO}}} \subseteq \ker F^n$$

Criterio di ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

Criterio di ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

$$\Sigma \text{ osservabile } (X_{NO} = \{0\}) \Rightarrow \Sigma \text{ ricostruibile}$$

anche quando $X_{NO} \neq \{0\}$

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ osservabile !!!}$$

$F = 0 \longrightarrow F^n = 0 \longrightarrow \ker F^n = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \supseteq X_{NO}$

Esempi

1. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

2. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

note

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ non osservabile
ma ricostruibile se $\alpha_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ osservabile e (quindi) ricostruibile

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 21: Osservabilità e ricostruibilità a tempo discreto

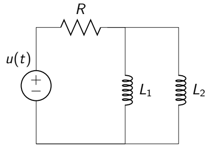
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio introduttivo



$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$t_0 = 0,\ L_1 = L_2 = L$

note

$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\underbrace{\text{Stati non osservabili in } [0,t]}_{\text{Spazio non osservabile in } [0,t]},\ t>0?$$

$$\dot{x}_1 = \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{V_{L_1}}{L_1} = \frac{(u - R\,i_R)}{L_1} = \frac{u - R(x_1+x_2)}{L_1} = -\frac{R}{L_1}x_1 - \frac{R}{L_1}x_2 + \frac{u}{L_1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{V_{L_2}}{L_2} = -\frac{R}{L_2}x_1 - \frac{R}{L_2}x_2 + \frac{u}{L_2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x \qquad (J = 0) \end{cases}$$

$$x_0 \neq 0 : \quad y(t) = He^{Ft}x_0 + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau$$

$$x_0 = 0 : \quad y_0(t) = \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau$$

$x_0 \neq 0$ è non osservabile in $[0,t]$ se $y(\tau) = y_0(\tau) \quad \forall \tau \in [0,t]$

$$\Downarrow$$

$$y(\tau) - y_0(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0,t]$$

$$\Downarrow$$

$$He^{F\tau}x_0 = 0 \quad \forall \tau \in [0,t]$$

Ipotesi semplificativa: $L_1 = L_2 = L$

$$F = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow F = T D T^{-1} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R}{L} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H e^{F\tau} x_0 = H T e^{D\tau} T^{-1} x_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2R\tau}{L}} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_0$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cancel{2}^{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2R\tau}{L}} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_0$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & e^{-\frac{2R\tau}{L}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-\frac{2R\tau}{L}} & e^{-\frac{2R\tau}{L}} \end{bmatrix} x_0 = e^{-\frac{2R\tau}{L}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_0 \quad \tau \in [0,t]$$

x_0 non osservabile in $[0,t]$ se $H e^{F\tau} x_0 = 0 \quad \forall \tau \in [0,t]$

$$\downarrow$$

$$e^{-\frac{2R\tau}{L}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_0 = 0 \longrightarrow x_0 \in \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\longrightarrow x_0 \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

Stati non osservabili in $[0,t]$ sono $x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Stati indistinguibili

$$x(0) = x_0: \quad y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$
$$x(0) = x_0': \quad y'(k) = HF^k x_0' + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

G. Baggio | Lez. 21: Osservabilità e ricostruibilità a t.d. | 4 Aprile 2022

Sequenza di ingresso: $u(0), u(1), \dots, u(t-1)$

$x(0) = x_0 : \quad y(k) = HF^k x_0 + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$

$x(0) = x_0' : \quad y'(k) = HF^k x_0' + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$

x_0' è indistinguibile da x_0 in $[0, t-1]$ $\longrightarrow y(k) = y'(k) \quad k = 0, 1, \dots, t-1$

$\longrightarrow y'(k) - y(k) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, t-1$

$$\begin{cases} k = 0: & y'(0) - y(0) = Hx_0' - Hx_0 = H(x_0' - x_0) = 0 \\ k = 1: & y'(1) - y(1) = HF(x_0' - x_0) = 0 \\ k = 2: & y'(2) - y(2) = HF^2(x_0' - x_0) = 0 \\ \vdots & \\ k = t-1: & y'(t-1) - y(t-1) = HF^{t-1}(x_0' - x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{} (x_0' - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x_0' - x_0 \in \ker \mathcal{O}_t$$

$\mathcal{O}_t$ = matrice di osservabilità in t passi

Quindi l'insieme di stati indistinguibili da x_0 in $[0, t-1]$ è

$$x_0 + \operatorname{Ker} O_t = \{ x_0 + x, \ x \in \operatorname{Ker} O_t \}$$

Inoltre l'insieme di stati non osservabili in $[0, t-1]$ è

$$X_{NO}(t) = \operatorname{Ker} O_t$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

note

1) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Sigma = (F, H)$ è osservabile?

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } \mathcal{O} = 1 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$

$\longrightarrow$ Σ non osservabile

2) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } \mathcal{O} = 2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$

$\longrightarrow$ Σ è osservabile

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

1) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\, \mathcal{O} = 1 \Rightarrow \Sigma = (F, H)$ non è osservabile

$X_{NO} = \ker \mathcal{O} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\Sigma = (F, H) \longrightarrow \ker F^2 \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$F^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$

$$\ker F^2 = \begin{cases} \{0\} & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0 \\ \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0 \\ \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0 \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

(primi due casi) $\ker F^2 \not\supseteq \ker \mathcal{O} \Rightarrow \Sigma$ non è ricostruibile

(ultimi due casi) $\ker F^2 \supseteq \ker \mathcal{O} \Rightarrow \Sigma$ è ricostruibile

2) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ $\qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ rank $\mathcal{O} = 2 \Rightarrow \Sigma$ osservabile

$\left(\Rightarrow X_{NO} = \operatorname{Ker} \mathcal{O} = \{0\} \right.$

$\left. \Rightarrow \operatorname{Ker} F^2 \supseteq X_{NO} \right)$

$\Rightarrow \Sigma$ ricostruibile