Il regolatore: equazioni dinamiche

sistema Σ: $\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

note

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(\overbrace{y(t)}^{Hx(t)} - H\hat{x}(t))$

Sistema regolatore: $x_{reg}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = Fx(t) + GK\hat{x}(t) + Gv(t) \\ \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - LH(x(t) - \hat{x}(t)) \\ \qquad = F\hat{x}(t) + GK\hat{x}(t) + Gv(t) - LHx(t) + LH\hat{x}(t) \\ \qquad = (F + GK + LH)\hat{x}(t) - LHx(t) + Gv(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{reg}(t+1) = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Σ_{reg} = sistema regolatore

Principio di separazione

regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$F_{reg} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \qquad G_{reg} = \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix}$$

$$H_{reg} = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$$

Cambio base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$: $z(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \underbrace{x(t) - \hat{x}(t)} \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$e(t)$ = errore di stima

$$F'_{reg} = T^{-1} F_{reg} T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F & GK \\ F+LH & \cancel{GK} - F - \cancel{GK} - LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ \cancel{F+LH-F-LH} & F+LH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix}$$

$$G'_{reg} = T^{-1} G_{reg} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H'_{reg} = H_{reg} T = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, un regolatore dead-beat.

$$F = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Esistenza regolatore dead-beat.

$\exists$ regolatore dead-beat $\iff \Sigma = (F, G, H)$ è controllabile e ricostr.

$\Sigma^{(1)} = (F_{11}, G_1, H_1)$

$R^{(1)} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11} G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, rank $R^{(1)} = 2 \implies \Sigma^{(1)}$ ragg.

$\mathcal{O}^{(1)} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, rank $\mathcal{O}^{(1)} = 2 \implies \Sigma^{(2)}$ osservabile

$\implies \Sigma$ è sia in forma di Kalman di ragg. che di oss.

$\implies (F_{22}, 0, 0)$ è il sottosistema non ragg. e non oss.

$\implies$ l'unico autovalore non ragg. / non oss. di Σ è 0

$\implies \Sigma$ è controllabile e ricostruibile

$\implies \exists$ regolatore dead-beat!

2) Calcolo regolatore dead-beat:

i) Calcolo K t.c. $\Delta_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$

ii) Calcolo L t.c. $\Delta_{F+LH}(\lambda) = \lambda^3$

i) Metodo per "ispezione diretta": $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+k_1 & 1+k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k_1 = -1, \ k_2 = -1, \ k_3 = \alpha \in \mathbb{R}$

$K^* = [-1 \ -1 \ \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è la matrice di retroazione del controllore dead-beat

(se $\alpha = 0$, otteniamo il controllore DB che porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi)

ii) Metodo di "ispezione diretta" $l_1 = 0, \ l_2 = -1, \ l_3 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$F + LH = \begin{bmatrix} l_1 & 1+l_1 & 0 \\ 1+l_2 & 1+l_2 & 0 \\ l_3 & l_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$L^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è il guadagno dello stimatore dead-beat
(se $\alpha = 0$, abbiamo lo stimatore dead-beat "ottimo")