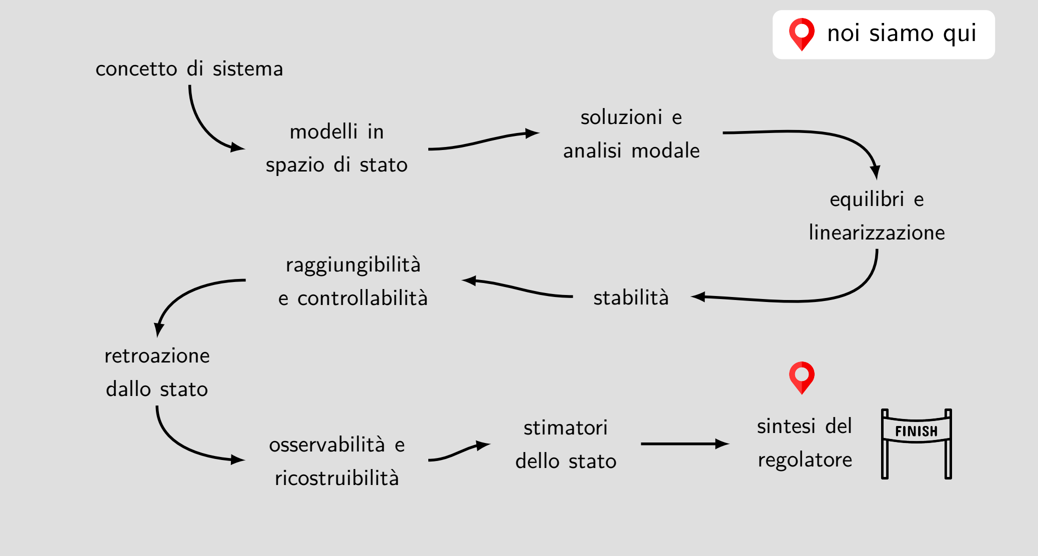
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 21: Sintesi del regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



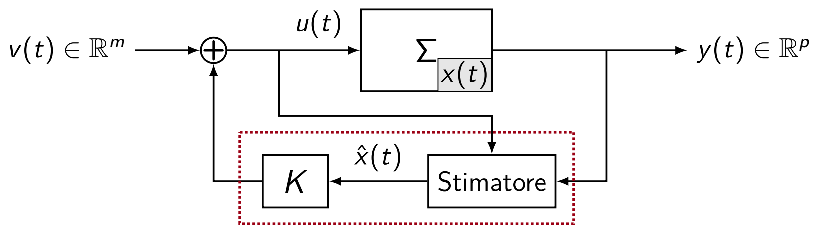
In questa lezione

- ▷ Il regolatore: struttura ed equazioni dinamiche
- ▷ Principio di separazione
- ▷ Esempio

Il regolatore

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



regolatore
= stimatore dello stato + controllo in retroazione dallo stato

Il regolatore: equazioni dinamiche

sistema Σ:
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

$\Longrightarrow$ regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Regolatori stabilizzanti

regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Definizione: Un regolatore si dice stabilizzante se il sistema che descrive il regolatore è asintoticamente stabile.

Definizione: Un regolatore si dice dead-beat se l'evoluzione dello stato del sistema regolatore va a zero in un numero finito di passi.

Principio di separazione

regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

regolatore nella base T:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Principio di separazione

regolatore nella base T:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{autovalori di } \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} = \text{autovalori di } F+GK \cup \text{autovalori di } F+LH\ !!!}$$

Principio di separazione: Gli autovalori del sistema regolatore sono l'unione di quelli delle due matrici $F+GK$ e $F+LH$. Quindi la sintesi della legge di controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di $F+GK$) e la sintesi dello stimatore (allocazione degli autovalori di $F+LH$) possono essere effettuate in modo indipendente.

Esistenza di regolatori stabilizzanti

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile.

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se Σ è sia controllabile che ricostruibile.

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, un regolatore dead-beat.

Il sistema è controllabile e ricostruibile per cui un regolatore dead-beat esiste.

Il regolatore dead-beat ha matrici $K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.