# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

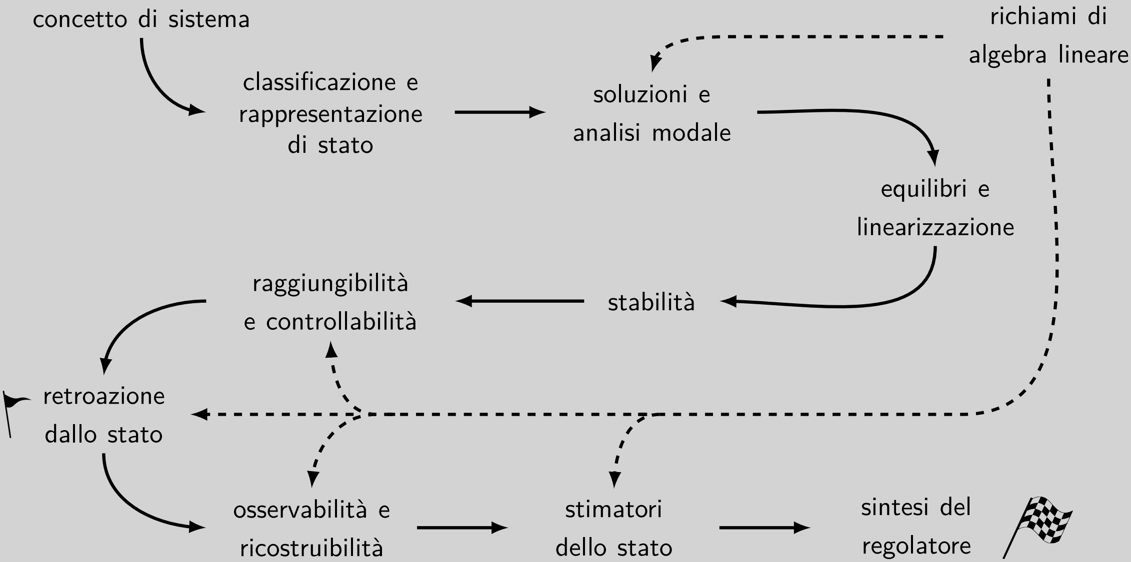
# Teoria dei Sistemi (Mod. A)

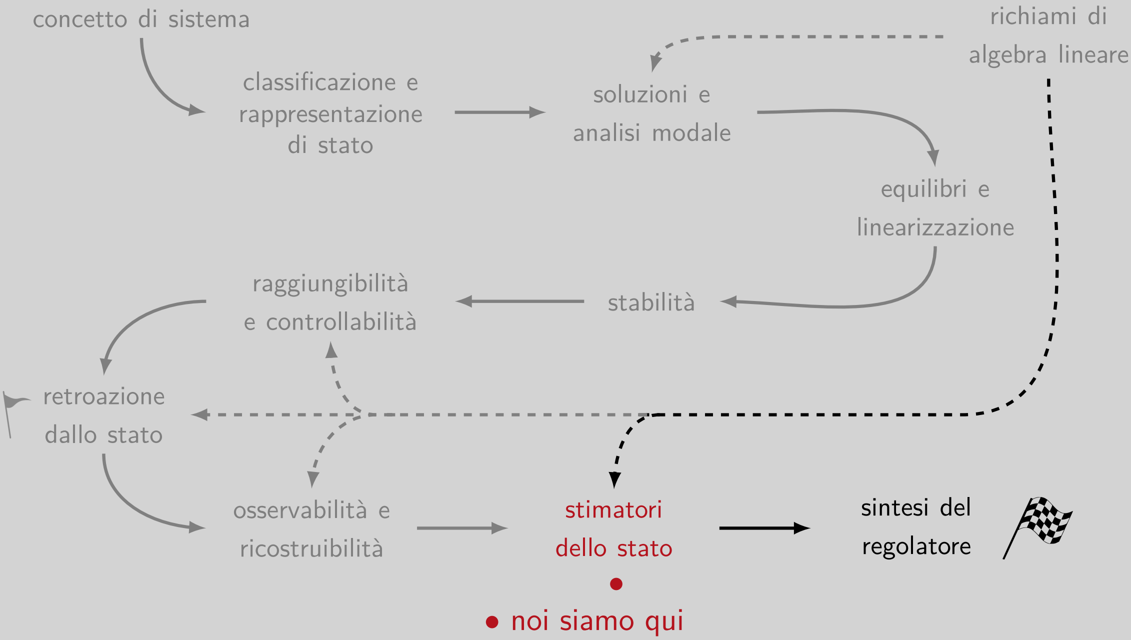
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

# Nella scorsa lezione

- Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
  - Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
    - Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
      - Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

# In questa lezione

- Sistema duale e sue proprietà
- Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- Stimatori dello stato
- Rivelabilità

# In questa lezione

- Sistema duale e sue proprietà
- Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- Stimatori dello stato
- Rivelabilità

# Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

# Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

$p$ ingressi
$m$ uscite
$n$ stati

# Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

$p$ ingressi
$m$ uscite
$n$ stati

**N.B.** Qui consideriamo sistemi a t.d. ma tutto si applica a t.c.!

# Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

extra

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

$p$ ingressi
$m$ uscite
$n$ stati

# Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

extra

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

$p$ ingressi
$m$ uscite
$n$ stati

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} H^\top & F^\top H^\top & \cdots & (F^\top)^{n-1} H^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ FH \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{O}^\top$$

$\Sigma_d$ raggiungibile
$\Updownarrow$
$\Sigma$ osservabile

---

$$\mathrm{Im}((F^\top)^n) \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}_d \iff \ker(F^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$$

$\Sigma_d$ controllabile
$\Updownarrow$
$\Sigma$ ricostruibile

# Sistema duale: osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d : \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

$p$ ingressi
$m$ uscite
$n$ stati

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^\top \\ G^\top F^\top \\ \vdots \\ G^\top (F^\top)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$$

$\Sigma_d$ osservabile
$\Updownarrow$
$\Sigma$ raggiungibile

---

$$\ker((F^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \mathrm{Im}(F^n) \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}$$

$\Sigma_d$ ricostruibile
$\Updownarrow$
$\Sigma$ controllabile

# Dualità: equivalenza algebrica

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r, "z = T^{-1}x"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \bar{\Sigma} = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r, "z = T^\top x"] & \bar{\Sigma}_d = (T^\top F (T^\top)^{-1}, T^\top H^\top, G^\top (T^\top)^{-1})
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\text{Cambio di base } T \text{ nel sistema di partenza} = \text{cambio di base } (T^\top)^{-1} \text{ nel sistema duale}}$

# Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

extra

sottosistema ragg.

$\Sigma_d$ non raggiungibile

Forma di Kalman (di raggiungibilità)

$$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \xrightarrow{z = T_K^{-1} x} \Sigma_{K,d} = \left( \begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right)$$

dualità

dualità

$$\Sigma = (F, G, H) \xrightarrow{z = T_K^\top x} \Sigma_K = \left( \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$\Sigma$ non osservabile

Forma di Kalman di osservabilità

$(F_{22}, G_2, 0)$ sottosistema non osservabile

# Dualità: forma canonica di controllo/osservazione

$\Sigma_d$ raggiungibile
con singolo ingresso ($p=1$)

Forma canonica di controllo

$$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \xrightarrow{\;z = T_c^{-1}x\;} \Sigma_{c,d} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G_{c,1}^\top \right)$$

dualità $\updownarrow$ dualità

$$\Sigma = (F, G, H) \xrightarrow{\;z = T_c^\top x\;} \Sigma_o = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_1 \\ & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, G_{c,1}, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$\Sigma$ osservabile
con singola uscita ($p=1$)

Forma canonica di osservazione

# Dualità: test PBH di raggiungibilità/osservabilità

Test PBH di raggiungibilità

$$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \longrightarrow \Sigma_d \text{ raggiungibile} \iff \text{rank}[zI - F^\top \ \ H^\top] = n, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

dualità

dualità

Matrice PBH di osservabilità

z autovalori di F!

$$\Sigma = (F, G, H) \longrightarrow \Sigma \text{ osservabile} \iff \text{rank}\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Test PBH di osservabilità

# In questa lezione

- Sistema duale e sue proprietà
- Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- Stimatori dello stato
- Rivelabilità

# Proprietà equivalenti all'osservabilità

extra

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Teorema:** Il sistema $\Sigma$ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale $\Sigma_d$ è raggiungibile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}$. ( $\forall z$ autovalore di F )
4. gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

# Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Teorema:** Il sistema $\Sigma$ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale $\Sigma_d$ è controllabile.
3. $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0.$
4. esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

# Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Teorema:** Il sistema $\Sigma$ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale $\Sigma_d$ è controllabile.
3. $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
4. esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

**N.B.** Parlare di ricostruibilità ha "senso" solo a t.d.!

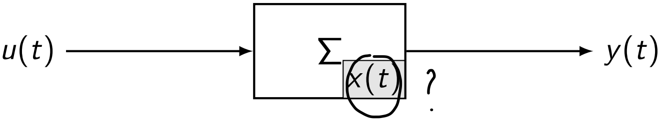
# In questa lezione

- ▷ Sistema duale e sue proprietà
- ▷ Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- ▷ Stimatori dello stato
- ▷ Rivelabilità

# Il problema della stima dello stato

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati




**Assunzione:** lo stato $x(t)$ non è direttamente accessibile

**Problema:** costruire una "buona" stima $\hat{x}(t)$ di $x(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

# Stimatori a catena aperta

extra

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

stimatore a catena aperta

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

# Stimatori a catena aperta

extra

$$\Sigma: \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

stimatore a catena aperta

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

$$\boxed{\text{errore di stima } e(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty \text{ se } F \text{ è instabile !!!}}$$

# Stimatori a catena chiusa

extra

termine correttivo

stimatore a catena chiusa

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ = guadagno dello stimatore

# Stimatori a catena chiusa

extra

stimatore a catena chiusa

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

errore di stima $e(t)$ tende a zero se $F + LH$ è asintoticamente stabile (e in questo caso $F$ può anche essere instabile) !!!

# Stimatori a catena chiusa: osservazioni

**1.** Per quanto visto prima, se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno $L$ in grado di rendere $F + LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di $L$ possiamo usare le tecniche di allocazione degli autovalori viste per il controllo in retroazione in questo caso applicate al sistema duale!
(tecnica diretta)

# Stimatori a catena chiusa: osservazioni

**1.** Per quanto visto prima, se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno $L$ in grado di rendere $F + LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di $L$ possiamo usare le tecniche di allocazione degli autovalori viste per il controllo in retroazione in questo caso applicate al sistema duale!

**2.** Se tutti gli autovalori di $F + LH$ vengono allocati in zero abbiamo costruito uno **stimatore dead-beat** !

# Stimatori a catena chiusa: osservazioni

**1.** Per quanto visto prima, se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno $L$ in grado di rendere $F + LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di $L$ possiamo usare le tecniche di allocazione degli autovalori viste per il controllo in retroazione in questo caso applicate al sistema duale!

**2.** Se tutti gli autovalori di $F + LH$ vengono allocati in zero abbiamo costruito uno **stimatore dead-beat** !

**3.** Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di **stimatori di ordine intero** perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire **stimatori di ordine ridotto** che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

# Stimatori a catena chiusa: osservazioni

**1.** Per quanto visto prima, se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno $L$ in grado di rendere $F + LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di $L$ possiamo usare le tecniche di allocazione degli autovalori viste per il controllo in retroazione in questo caso applicate al sistema duale!

**2.** Se tutti gli autovalori di $F + LH$ vengono allocati in zero abbiamo costruito uno **stimatore dead-beat** !

**3.** Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di **stimatori di ordine intero** perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire **stimatori di ordine ridotto** che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

**4.** Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

# Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat.

# Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat.

---

Il sistema è osservabile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

# In questa lezione

▷ Sistema duale e sue proprietà

▷ Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità

▷ Stimatori dello stato

▷ Rivelabilità

# Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Definizione:** Il sistema $\Sigma$ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

# Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Definizione:** Il sistema $\Sigma$ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $\Sigma$ è rivelabile.
2. Il sistema duale $\Sigma_d$ è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con modulo minore di 1.
4. Il sottosistema non osservabile di $\Sigma$ ha autovalori con modulo minore di 1.
5. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango $n$, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

# Rivelabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Definizione:** Il sistema $\Sigma$ si dice rivelabile in tempo finito se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende a zero in tempo finito.

# Rivelabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Definizione:** Il sistema $\Sigma$ si dice rivelabile in tempo finito se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende a zero in tempo finito.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $\Sigma$ è rivelabile in tempo finito.
2. $\Sigma$ ammette uno stimatore dead-beat.
3. Il sistema duale $\Sigma_d$ è stabilizzabile in tempo finito.
4. $\Sigma$ è ricostruibile.
5. Il sottosistema non osservabile di $\Sigma$ ha autovalori nulli.
6. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango $n$, $\forall z$ con $z \neq 0$.

# Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Definizione:** Il sistema $\Sigma$ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

# Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Definizione:** Il sistema $\Sigma$ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $\Sigma$ è rivelabile.
2. Il sistema duale $\Sigma_d$ è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con parte reale minore di $\overset{0}{\cancel{1}}$.
4. Il sottosistema non osservabile di $\Sigma$ ha autovalori con parte reale minore di $\overset{0}{\cancel{1}}$.
5. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango $n$, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

# Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Discutere la rivelabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

# Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Discutere la rivelabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

Il sistema è rivelabile se $|\alpha| < 1$ (rivelabile in tempo finito se $\alpha = 0$).

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
# Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

## Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

extra

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

$p$ ingressi
$m$ uscite
$n$ stati



back

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = F x(t) + G u(t) \\ y(t) = H x(t) \end{cases}$$

$$\Sigma_d: \begin{cases} x(t+1) = F^T x(t) + H^T u(t) \\ y(t) = G^T x(t) \end{cases}$$

$\Sigma_d$ raggiungibile $\iff$ $\operatorname{rank} R_d = n$

$$R_d = \begin{bmatrix} H^T & F^T H^T & (F^T)^2 H^T & \cdots & (F^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^T = \mathcal{O}^T$$

$\iff \text{rank}\, \mathcal{O}^T = n$

$\iff \text{rank}\, \mathcal{O} = n$

$\iff \Sigma$ osservabile

$\Sigma_d$ controllabile $\iff \text{Im}\,(F^T)^n \subseteq \text{Im}\, R_d$

$\iff \text{Im}\,(F^n)^T \subseteq \text{Im}\, \mathcal{O}^T$

(*) $\iff [\text{Ker}\, F^n]^\perp \subseteq [\text{Ker}\, \mathcal{O}]^\perp$

$\iff \text{Ker}\, F^n \supseteq \text{Ker}\, \mathcal{O}$

$\iff \Sigma$ ricostruibile

N.B. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (*)

$\text{Im}\, A = [\text{Ker}(A^T)]^\perp$

complemento ortogonale

## Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

extra

$\Sigma_d$ non raggiungibile — Forma di Kalman (di raggiungibilità)

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r, "z = T_K^{-1}x"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_{K,d} = \left( \begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r, "z = T_K^\top x"] & \Sigma_K = \left( \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{tikzcd}$$

$\Sigma$ non osservabile — Forma di Kalman di osservabilità

$(F_{22}, G_2, 0)$ sottosistema non osservabile



back

Forma di Kalman di osservabilità:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

osservabile!

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_o(t) \\ x_{NO}(t) \end{bmatrix}$$

$(F_{11}, G_1, H_1)$ = sottosistema osservabile

$$\begin{cases} x_o(t+1) = F_{11}\, x_o(t) + G_1\, u(t) \\ x_{NO}(t+1) = F_{21}\, x_o(t) + F_{22}\, x_{NO}(t) + G_2\, u(t) \\ y(t) = H_1\, x_o(t) \end{cases}$$

$(F_{22}, G_2, H_2)$ = sottosistema non osservabile

## Proprietà equivalenti all'osservabilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$ ingressi
$p$ uscite
$n$ stati

**Teorema:** Il sistema $\Sigma$ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale $\Sigma_d$ è raggiungibile.
3. $\text{rank}\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
4. gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.



back

$\Sigma$ osservabile $\iff$ $\Sigma_d$ raggiungibile

$\iff$ $F^T + H^T K$ ha autovalori allocabili a piacere tramite la matrice $K$

$\iff$ $F + K^T H$ ha autovalori allocabili a piacere tramite la matrice $L = K^T$

## Stimatori a catena aperta

extra

$$\Sigma: \quad \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

stimatore a catena aperta

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$



back

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = F x(t) + G u(t) \\ y(t) = H\, x(t) \end{cases}$$

$$\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\, \hat{x}(t) + G u(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}$$

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ = errore di stima

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F x(t) + \cancel{Gu}(t) - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu}(t)$$

$$= F\left(x(t) - \hat{x}(t)\right) = F\, e(t)$$

$F$ è asint. stabile $\Rightarrow$ $e(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$

## Stimatori a catena chiusa

extra

stimatore a catena chiusa

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad \boxed{\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ = guadagno dello stimatore





$$\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}$$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)} - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu(t)} + L(Hx(t) - H\hat{x}(t))$$

$$= (F + LH)(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)\, e(t)$$

## Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat.



back

$$x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{F} x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x(t)$$

- Esistenza?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow \Sigma \text{ osservabile}$$

$\Rightarrow \exists$ stimatore dead-beat

- $p(\lambda) = \lambda^2 \qquad L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & l_1 \\ l_2 & l_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda - l_1 & -1 - l_1 \\ -l_2 & \lambda - 1 - l_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - l_1)(\lambda - 1 - l_2) - l_2(1 + l_1)$$

$$= \lambda^2 - (l_1 + l_2 + 1)\lambda + l_1 + \cancel{l_1 l_2} - l_2 - \cancel{l_1 l_2} \overset{!}{=} \lambda^2$$

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + 1 = 0 \\ l_1 - l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 = -\frac{1}{2} \\ l_1 = l_2 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 = -1/2 \\ l_1 = -1/2 \end{cases} \qquad L = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

## Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Discutere la rivelabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.



back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} x(t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$\Sigma$ è in forma di Kalman di osservabilità:

$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$ $\quad H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (F_{11}, H_1)$ è osservabile

$(F_{22}, 0)$ è il sottosistema non osservabile

$F_{22} = \alpha$ $\rightarrow$ $|\alpha| \geq 1$ $\quad \Sigma$ non è rivelabile

$\rightarrow$ $|\alpha| < 1$ $\quad \Sigma$ è rivelabile