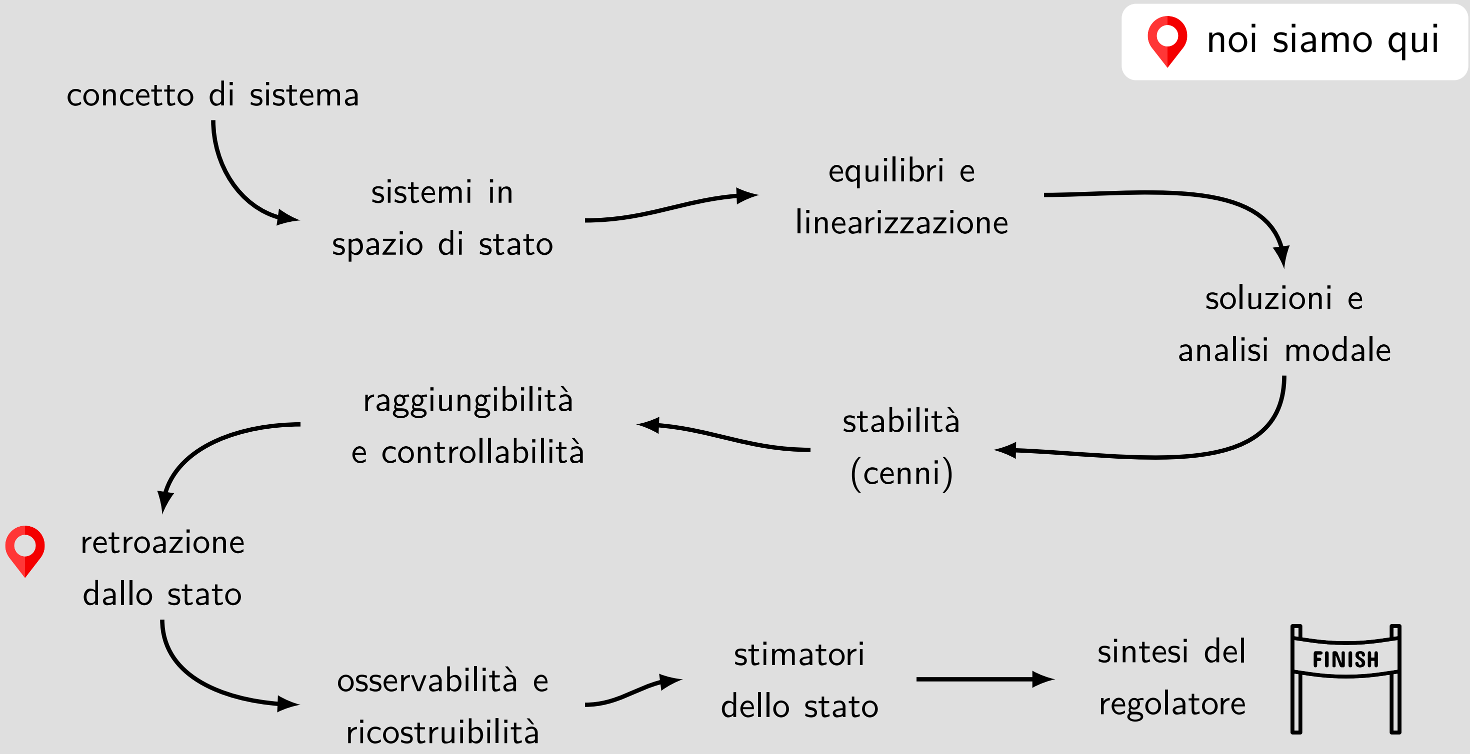
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Controllo in retroazione dallo stato (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- Comandi Matlab®

In questa lezione

- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- ▷ Stabilizzabilità

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $F+GK$ degli autovalori desiderati?

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} \underset{\in \mathbb{R}^n}{g_1} & \cdots & \underset{\in \mathbb{R}^n}{g_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \mathbb{R}^{1 \times n} \\ \\ \leftarrow \mathbb{R}^{1 \times n} \end{array} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima per il caso singolo ingresso ($m = 1$)!

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima per il caso singolo ingresso ($m = 1$)!

Problema: Anche se il sistema Σ è raggiungibile, non è detto che lo sia usando un singolo ingresso !!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

note

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma:\quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}:\quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

Lemma di Heymann

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

note

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

note

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1.

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!

M = randn(p, q)

matrice $p \times q$ con elementi indip. random presi da $\mathcal{N}(0, 1)$

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!
2. Un approccio alternativo è usare il metodo diretto (cioè risolvere $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$ con incognite gli elementi di K) anche nel caso $m > 1$. In questo caso, però il sistema di equazioni da risolvere potrebbe essere non lineare!

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!

2. Un approccio alternativo è usare il metodo diretto (cioè risolvere $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$ con incognite gli elementi di K) anche nel caso $m > 1$. In questo caso, però il sistema di equazioni da risolvere potrebbe essere non lineare!

3. L'approccio tramite lemma di Heymann ci permette di allocare gli autovalori della matrice $F + GK$ a nostro piacimento anche per $m > 1$, ma ha delle limitazioni. Ad esempio, usando un singolo ingresso non si possono ottenere controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$. Usando più ingressi invece è possibile costruire controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$! Tramite tecniche di controllo più avanzate che sfruttano tutti gli ingressi di controllo si possono ottenere quindi prestazioni di controllo migliori.

In questa lezione

- Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- Stabilizzabilità

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il $\underbrace{\text{sistema asintoticamente stabile}}_{\text{autovalori con modulo } < 1}$.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Raggiungibilità $\Rightarrow$ Controllabilità $\Rightarrow$ Stabilizzabilità

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno modulo < 1. — non modificabili tramite retroazione statica
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Test PBH di stabilizzabilità

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il $\underbrace{\text{sistema asintoticamente stabile}}_{\text{autovalori di } F \text{ con parte reale } < 0}$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Raggiungibilità $\iff$ Controllabilità $\implies$ Stabilizzabilità

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno parte reale < 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

$\forall z \in \mathbb{C} \longrightarrow$ possiamo però restringerci agli z che sono autovalori di F

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Controllo in retroazione dallo stato (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Σ ragg.? $\quad R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{rank} R = 2$

$\longrightarrow \Sigma = (F, G)$ ragg.

Σ ragg. da 1 ingresso?

1° ingresso g_1: $\quad R^{(1)} = [g_1 \;\; Fg_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{rank} R^{(1)} = 1$

$\longrightarrow \Sigma^{(1)} = (F, g_1)$ non ragg.

2° ingresso g_2: $\quad R^{(2)} = [g_2 \;\; Fg_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{rank} R^{(2)} = 1$

$\longrightarrow \Sigma^{(2)} = (F, g_2)$ non ragg.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

Σ: $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m > 1$

$\Sigma^{(K)}$: $x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso, è possibile assegnare a $F+GK$ degli autovalori desiderati?

Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

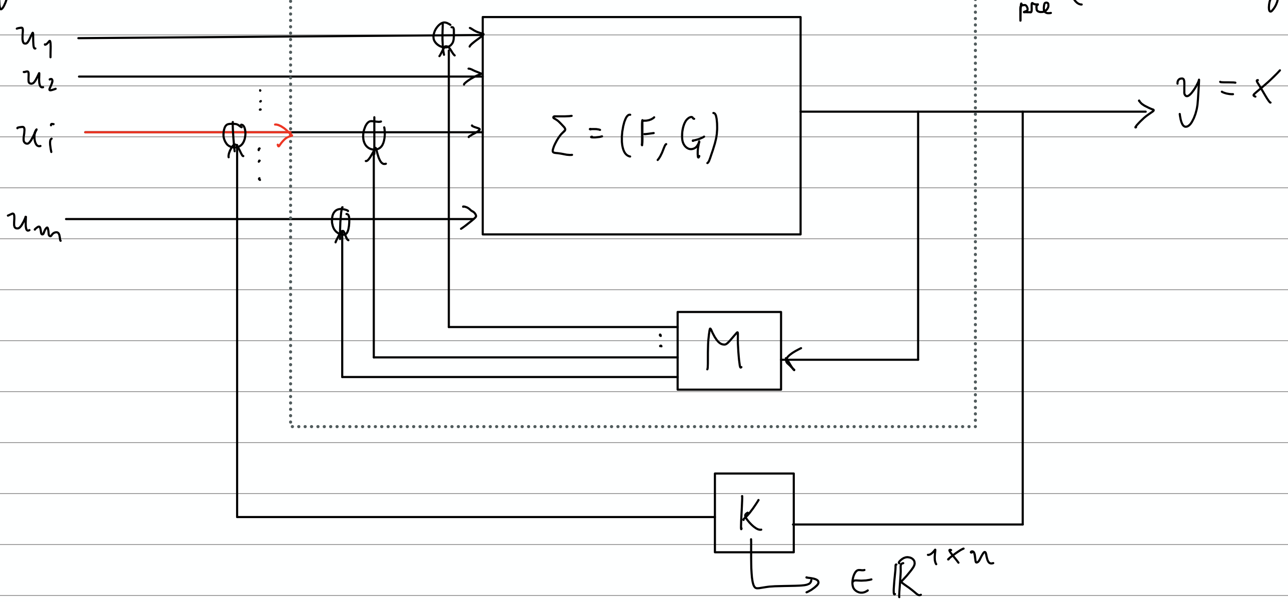
Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $(F+GM, g_i)$ è raggiungibile.

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m > 1$

$G = [g_1\ g_2 \cdots g_i \cdots g_m]$

$g_i \neq 0$

$\Sigma_{pre} = (F+GM, g_i)$ ragg.



Matrice retroazione complessiva:

$$K_{tot} = M + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima riga}$$

<u>Teorema</u>: $\exists K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ t.c. $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$, per ogni

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

se e solo se il sistema $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} \leftarrow$ pol. desiderato

1) $\Sigma = (F, G)$ è ragg. $\Longrightarrow \exists K^*$

2) Σ non è ragg. da 1 ingresso.

Usiamo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ come matrice di pre-retroazione per rendere il sistema raggiungibile dal primo ingresso.

$\Sigma_{pre} = (F + GM, g_1)$ raggiungibile? $\quad F + GM = M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$R_{pre} = [g_1 \ \ (F+GM)g_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{rank} R_{pre} = 2$

$\longrightarrow \Sigma_{pre}$ è raggiungibile

Metodo di calcolo diretto per la matrice di retroazione di Σ_{pre}:

Sia $K = [k_1 \ k_2]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ la matrice di retroazione

$\Delta_{F+GM+g_1K}(\lambda) \overset{!}{=} p(\lambda)$

$$\Delta_{F+GM+g_1K}(\lambda) = \det(\lambda I \underbrace{- F - GM}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} \underbrace{- g_1 K}_{\begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - k_1 & -k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$= \lambda(\lambda - k_1) - k_2$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1/4 = \lambda^2 - k_1\lambda - k_2$$

$$\begin{cases} -1 = -k_1 \\ 1/4 = -k_2 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1/4 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Matrice di retroazione complessiva: $K^* = K_{tot} = M + \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Calcolare un controllore dead-beat per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Polinomio desiderato: $p(\lambda) = \lambda^3$

i) Esistenza del controllore dead-beat.

$\exists$ controllore dead-beat $\iff \Sigma = (F, G)$ è controllabile

Verifichiamo la controllabilità di Σ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Test PBH di controllabilità

Autovalori di F: - caso $\alpha = 0$: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3 \longrightarrow \Sigma$ controllabile

- caso $\alpha \neq 0$: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = \alpha$, $\nu_1 = 1$

Caso $\alpha \neq 0$:

$$PBH(\alpha) = [\alpha I - F \quad G] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}(PBH(\alpha)) = \begin{cases} 2 & \alpha = -1 \\ 3 & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

Allora:

- se $\alpha = -1$, Σ non è controllabile $\Rightarrow \nexists$ controllore dead-beat
- se $\alpha \neq -1$, Σ controllabile $\Rightarrow \exists$ controllore dead-beat