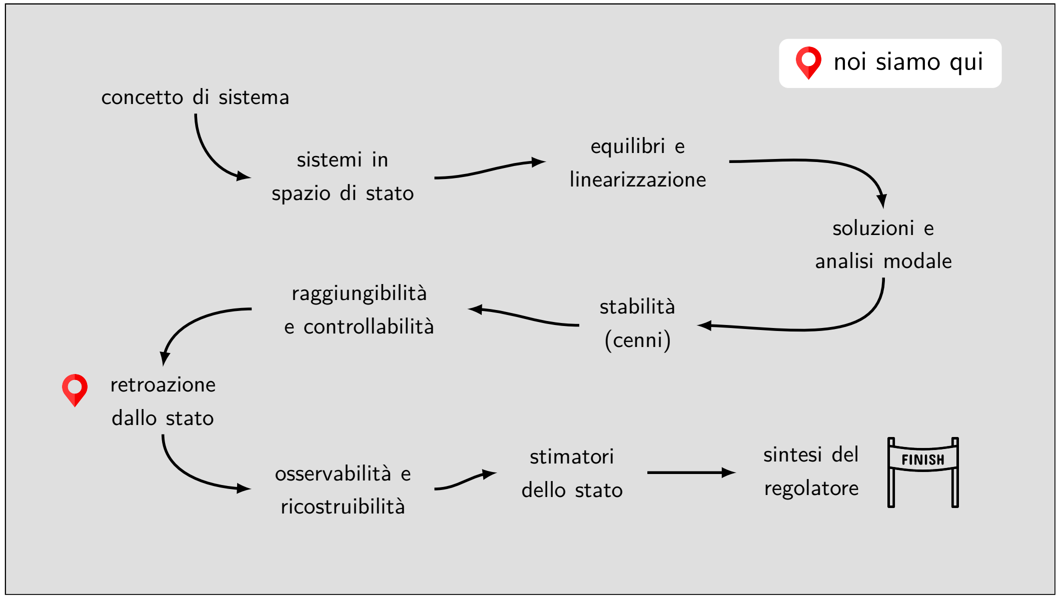
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Controllo in retroazione dallo stato (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- ▷ Stabilizzabilità

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \;\; x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\; m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \;\; x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima per il caso singolo ingresso ($m = 1$)!

Problema: Anche se il sistema Σ è raggiungibile, non è detto che lo sia usando un singolo ingresso !!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1.

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!
2. Un approccio alternativo è usare il metodo diretto (cioè risolvere $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$ con incognite gli elementi di K) anche nel caso $m > 1$. In questo caso, però il sistema di equazioni da risolvere potrebbe essere non lineare!
3. L'approccio tramite lemma di Heymann ci permette di allocare gli autovalori della matrice $F + GK$ a nostro piacimento anche per $m > 1$, ma ha delle limitazioni. Ad esempio, usando un singolo ingresso non si possono ottenere controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$. Usando più ingressi invece è possibile costruire controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$! Tramite tecniche di controllo più avanzate che sfruttano tutti gli ingressi di controllo si possono ottenere quindi prestazioni di controllo migliori.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno modulo < 1.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno parte reale < 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.