Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$$\Sigma_d : \begin{cases} x(t+1) = F^T x(t) + H^T u(t) \\ y(t) = G^T x(t) \end{cases}$$

Σ_d raggiungibile $\iff \operatorname{rank} R_d = n$

$$R_d = \left[H^T \;\; F^T H^T \;\; (F^T)^2 H^T \; \cdots \; (F^T)^{n-1} H^T \right]$$

$\iff \operatorname{rank} R_d^T = n$

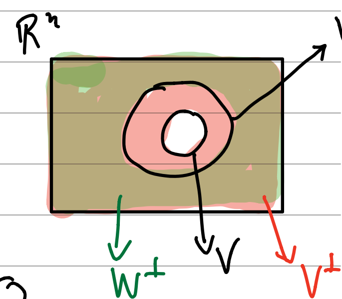
$$R_d^T = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}$$

$\iff \operatorname{rank} \mathcal{O} = n$

$\iff \Sigma$ osservabile

<u>Fatto</u>: $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ $\quad [\operatorname{im} A]^\perp = \ker A^T \qquad (*)$

$V^\perp$ = complemento ortogonale del sottospazio V
= insieme dei vettori ortogonali a tutti i vettori di V



Σ_d controllabile $\iff \operatorname{im}(F^T)^n \subseteq \operatorname{im} R_d$

$\iff [\operatorname{im}(F^T)^n]^\perp \supseteq [\operatorname{im} R_d]^\perp$

$(*) \iff \ker F^n \supseteq \ker R_d^T = \ker \mathcal{O}$

$\iff \Sigma$ ricostruibile

$$\Sigma_d \text{ osservabile} \iff \operatorname{rank} \mathcal{O}_d = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} G^T \\ G^T F^T \\ \vdots \\ G^T (F^T)^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

$$\iff \operatorname{rank} \mathcal{O}_d^T = \operatorname{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}_{R} = \operatorname{rank} R = n$$

$$\iff \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$$\Sigma_d \text{ ricostruibile} \iff \operatorname{Ker} (F^T)^n \supseteq \operatorname{Ker} \mathcal{O}_d$$

$$\iff \left[\operatorname{Ker} (F^T)^n\right]^\perp \subseteq \left[\operatorname{Ker} \mathcal{O}_d\right]^\perp$$

$$(*) \iff \operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} \mathcal{O}_d^T = \operatorname{im} R$$

$$\iff \Sigma \text{ controllabile}$$

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_{K,d} = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r] & \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{tikzcd}
$$

Σ_d non raggiungibile — Forma di Kalman di raggiungibilità

Σ non osservabile — Forma di Kalman di osservabilità

$(F_{22}, 0)$ sottosistema non osservabile

note

$$\Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overbrace{H_1}^{k} & 0 \end{bmatrix} \right)$$ forma di Kalman di osservabilità

$$x = \begin{bmatrix} x_o \\ x_{No} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, k \\ \}\, n-k \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_o(t+1) = F_{11} x_o(t) + G_1 u(t) \\ x_{No}(t+1) = F_{21} x_o(t) + F_{22} x_{No}(t) + G_2 u(t) \\ y(t) = H_1 x_o(t) \end{cases}$$

x_{No} non compare nell'uscita!

$\Sigma_o = (F_{11}, G_1, H_1)$ è sottosistema osservabile $[(F_{11}, H_1)$ è osservabile$]$

$\Sigma_{No} = (F_{22}, G_2, 0)$ è sottosistema non osservabile

Stimatori ad anello aperto

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

stimatore ad anello aperto

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$

note

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Stimatore ad anello aperto: $\hat{\Sigma} : \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}$

Errore di stima al tempo t:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)} - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu(t)}$$

$$= F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

Evoluzione dell'errore di stima:

$$e(t+1) = Fe(t), \quad e(0) = e_0 \implies e(t) = F^t e_0$$

<u>N.B.</u>: Se F ha autovalori con modulo > 1 (Σ instabile) e $e_0 \neq 0$

$\implies$ $e(t)$ può divergere in t! $\implies$ $e(t) \longrightarrow \infty$ per $t \to \infty$!

Stimatori ad anello chiuso

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

stimatore ad anello chiuso

$$\hat{\Sigma}: \boxed{\begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Stimatore ad anello chiuso: $\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - \underbrace{L}_{\substack{\text{guadagno} \\ \text{dello stimatore} \\ \in \mathbb{R}^{n\times p}}} \overbrace{\underbrace{(y(t) - H\hat{x}(t))}_{\substack{\text{scostamento tra} \\ \text{uscita vera e l'uscita} \\ \text{stimata}}}}^{\text{termine correttivo}} \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}$

Errore di stima:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)} - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu(t)} + L(\overset{\overset{Hx(t)}{\parallel}}{y}(t) - Hx(t))$$

$$= F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t))$$

$$= (F + LH)(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)\,e(t)$$

Evoluzione dell'errore di stima:

$$e(t) = (F + LH)^t e_0 \qquad e(0) = e_0$$

<u>N.B.</u> Anche se F è instabile ($\Rightarrow \Sigma$ instabile), $F + LH$ potrebbe avere autovalori con modulo < 1!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = (F, G, H)$$

Stimatore dead-beat? $\exists\, L^* \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta_{F+LH}(\lambda) = \lambda^2$?

1) Esistenza stimatore dead-beat.

$$\Updownarrow$$

Σ ricostruibile

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\, \mathcal{O} = 2 \implies \Sigma \text{ osservabile}$$

$\implies \Sigma$ ricostruibile

$\implies \exists$ stimatore dead-beat

2) Calcolo $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ tale che $\Delta_{F+LH}(\lambda) = \lambda^2$.

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det \begin{bmatrix} \lambda - l_1 & -1 - l_1 \\ -l_2 & \lambda - 1 - l_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - l_1)(\lambda - 1 - l_2) - l_2(1 + l_1)$$

$$= \lambda^2 + (-1 - l_2 - l_1)\lambda + l_1 + \cancel{l_1 l_2} - l_2 - \cancel{l_1 l_2}$$

$$= \lambda^2 + (-1 - l_2 - l_1)\lambda + l_1 - l_2$$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det \begin{bmatrix} \lambda - l_1 & -1-l_1 \\ -l_2 & \lambda - 1 - l_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - l_1)(\lambda - 1 - l_2) - l_2(1 + l_1)$$

$$= \lambda^2 + (-1 - l_2 - l_1)\lambda + l_1 + \cancel{l_1 l_2} - l_2 - \cancel{l_1 l_2}$$

$$= \lambda^2 + (-1 - l_2 - l_1)\lambda + l_1 - l_2 \overset{!}{=} \lambda^2$$

$$\begin{cases} -1 - l_2 - l_1 = 0 \\ l_1 - l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = -\dfrac{1}{2} \\ l_2 = l_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad L^* = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

guadagno dello stimatore dead-beat