Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d. $\longrightarrow$ Σ ricostruibile $\iff \operatorname{Ker} \mathcal{O} \subseteq \operatorname{Ker} F^n$

$=$

- ▷ Osservabilità e ~~ricostruibilità~~ di sistemi lineari a t.c.

Σ osservabile $\iff \operatorname{rank} \mathcal{O} = n$

In questa lezione

- ▷ Sistema duale e sue proprietà
- ▷ Stimatori dello stato
- ▷ Rivelabilità

Sistema duale

$\in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\in \mathbb{R}^{p\times n}$

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$(\cdot)^T$ $(\cdot)^T$ $(\cdot)^T$

m ingressi
p uscite
n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d : \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

N.B. Qui consideriamo sistemi a t.d. ma tutto si applica a t.c.!

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

note

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} H^\top & F^\top H^\top & \cdots & (F^\top)^{n-1} H^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ FH \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{O}^\top$$

Σ_d raggiungibile
$\Updownarrow$
Σ osservabile

$$\mathrm{im}((F^\top)^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}_d \iff \ker(F^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$$

Σ_d controllabile
$\Updownarrow$
Σ ricostruibile

note

Sistema duale: osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^\top \\ G^\top F^\top \\ \vdots \\ G^\top (F^\top)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$$

Σ_d osservabile
$\Updownarrow$
Σ raggiungibile

$$\ker((F^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \mathrm{im}(F^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}$$

Σ_d ricostruibile
$\Updownarrow$
Σ controllabile

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

Σ_d non raggiungibile — Forma di Kalman di raggiungibilità

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_{K,d} = \left(\begin{array}{c} k \\ \end{array} \begin{bmatrix} \overbrace{F_{11}^\top}^{k} & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{array}{c} k \\ \end{array} \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overbrace{G_1^\top}^{k} & \overbrace{G_2^\top}^{n-k} \end{bmatrix} \right) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}", "(\cdot)^\top"'] \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r] & \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underbrace{H_1}_{k} & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{tikzcd}
$$

$(\cdot)^\top$ $(\cdot)^\top$ $(\cdot)^\top$

Σ non osservabile — Forma di Kalman di osservabilità

$(F_{22}, 0)$ sottosistema non osservabile

note

Dualità: test PBH di raggiungibilità/osservabilità

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \text{Test PBH di raggiungibilità} \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r] & \text{Test PBH di osservabilità}
\end{tikzcd}$$

Test PBH di raggiungibilità

Σ_d raggiungibile $\iff$

$$\operatorname{rank}[zI - F^\top \;\; H^\top] = n, \; \forall z \in \mathbb{C}$$

(z autovalori di $F^\top$)

$\parallel$

(z autov. di F)

dualità

Σ osservabile $\iff$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \; \forall z \in \mathbb{C}$$

(z autovalori di F)

matrice PBH di osservabilità

Test PBH di osservabilità

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} < n \iff z \text{ sono autovalori non osservabili di } \Sigma$$

Dualità: allocazione degli autovalori

$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \longrightarrow$ Σ_d raggiungibile $\iff$

$\exists\, K \in \mathbb{R}^{p \times n}$: $F^\top + H^\top K$ ha autovalori desiderati

$\updownarrow$ dualità $\qquad\qquad$ $\updownarrow$ dualità

$\Sigma = (F, G, H) \longrightarrow$ Σ osservabile $\iff$

$\exists\, L = K^\top \in \mathbb{R}^{n \times p}$: $F + LH$ ha autovalori desiderati

$(\cdot)^\top$

Proprietà equivalenti all'osservabilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n.$ (criterio del rango)
2. Il sistema duale Σ_d è raggiungibile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \forall z \in \mathbb{C}.$ (test PBH di osservabilità)
4. Gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0.$ (test PBH di ricostruibilità)
4. Esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

$\Updownarrow$

Σ_d contr. $\iff$ $\exists$ controllore dead-beat

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
4. Esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

N.B. Parlare di ricostruibilità ha senso solo a t.d.!

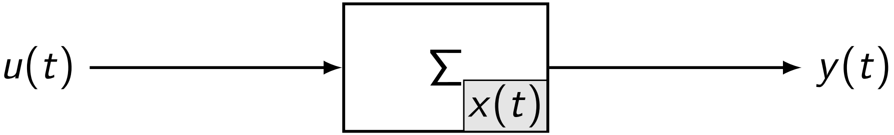
In questa lezione

- Sistema duale e sue proprietà
- Stimatori dello stato
- Rivelabilità

Il problema della stima dello stato

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



Assunzione: lo stato $x(t)$ non è direttamente accessibile

Problema: costruire una "buona" stima $\hat{x}(t)$ di $x(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

Stimatori ad anello aperto (in catena aperta)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

stimatore ad anello aperto

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

note

Stimatori ad anello aperto

stimatore ad anello aperto

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad\qquad \boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

il sistema con matrice di stato F

$$\boxed{\text{errore di stima } e(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty \text{ se } F \text{ è instabile !!!}}$$

note

Stimatori ad anello chiuso (in catena chiusa)

stimatore ad anello chiuso

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

note

Stimatori ad anello chiuso

stimatore ad anello chiuso

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ = guadagno dello stimatore

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

errore di stima $e(t)$ tende a zero se $F + LH$ è asintoticamente stabile (e in questo caso F può anche essere instabile) !!!

note

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

Σ_d: $\exists K$: $F^T + H^T K$ ha autovalori desiderati

Σ: $\exists L = K^T$: $F + LH$ ha autovalori desiderati

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!

$$\begin{array}{ccc} \exists \text{ stimatore dead-beat per } \Sigma & \Longleftrightarrow & \exists \text{ controllore DB per } \Sigma_d \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \Sigma \text{ ricostruibile} & \Longleftrightarrow & \Sigma_d \text{ è controllabile} \end{array}$$

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!

3. Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!

3. Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

4. Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

note

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

Il sistema è osservabile e quindi ricostruibile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

note

In questa lezione

- Sistema duale e sue proprietà
- Stimatori dello stato
- Rivelabilità

Rivelabilità a t.d. (detectability)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con modulo < 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo < 1.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

z autovalori di F

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con parte reale < 0.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale < 0.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

z autovalori di F

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$$\Sigma_d: \begin{cases} x(t+1) = F^T x(t) + H^T u(t) \\ y(t) = G^T x(t) \end{cases}$$

Σ_d raggiungibile $\iff \operatorname{rank} R_d = n$

$$R_d = \left[H^T \;\; F^T H^T \;\; (F^T)^2 H^T \; \cdots \; (F^T)^{n-1} H^T \right]$$

$\iff \operatorname{rank} R_d^T = n \qquad R_d^T = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}$

$\iff \operatorname{rank} \mathcal{O} = n$

$\iff \Sigma$ osservabile

<u>Fatto</u>: $A \in \mathbb{R}^{p \times q} \quad [\operatorname{im} A]^\perp = \ker A^T \qquad (*)$

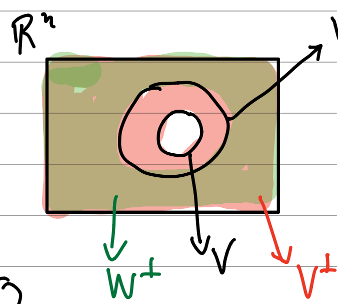
$V^\perp$ = complemento ortogonale del sottospazio V
= insieme dei vettori ortogonali a tutti i vettori di V

Σ_d controllabile $\iff \operatorname{im} (F^T)^n \subseteq \operatorname{im} R_d$

$\iff [\operatorname{im}(F^T)^n]^\perp \supseteq [\operatorname{im} R_d]^\perp$

$(*) \iff \ker F^n \supseteq \ker R_d^T = \ker \mathcal{O}$

$\iff \Sigma$ ricostruibile



Σ_d osservabile $\iff \operatorname{rank} O_d = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} G^T \\ G^T F^T \\ \vdots \\ G^T (F^T)^{n-1} \end{bmatrix} = n$

$\iff \operatorname{rank} O_d^T = \operatorname{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}_{R} = \operatorname{rank} R = n$

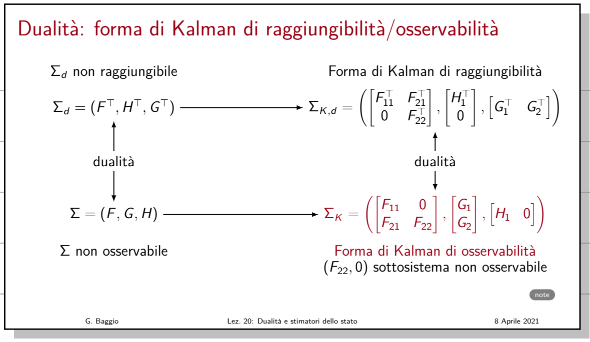
$\iff \Sigma$ raggiungibile

Σ_d ricostruibile $\iff \operatorname{Ker} (F^T)^n \supseteq \operatorname{Ker} O_d$

$\iff [\operatorname{Ker} (F^T)^n]^\perp \subseteq [\operatorname{Ker} O_d]^\perp$

$(*)$ $\iff \operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} O_d^T = \operatorname{im} R$

$\iff \Sigma$ controllabile



$$\Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, [\overbrace{H_1}^{K} \;\; 0] \right)$$ forma di Kalman di osservabilità

$$x = \begin{bmatrix} x_o \\ x_{No} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, K \\ \}\, n-K \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_o(t+1) = F_{11} x_o(t) + G_1 u(t) \\ x_{No}(t+1) = F_{21} x_o(t) + F_{22} x_{No}(t) + G_2 u(t) \\ y(t) = H_1 x_o(t) \end{cases}$$

x_{No} non compare nell'uscita!

$\Sigma_o = (F_{11}, G_1, H_1)$ è sottosistema osservabile $[(F_{11}, H_1)$ è osservabile$]$

$\Sigma_{No} = (F_{22}, G_2, 0)$ è sottosistema non osservabile

Stimatori ad anello aperto

Σ: $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$, $y(t) = Hx(t)$

stimatore ad anello aperto

$\boxed{\hat{\Sigma}: \ \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t), \ \hat{y}(t) = \hat{x}(t)}$

note

G. Baggio — Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato — 8 Aprile 2021

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Stimatore ad anello aperto: $\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}$

Errore di stima al tempo t:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)} - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu(t)}$$

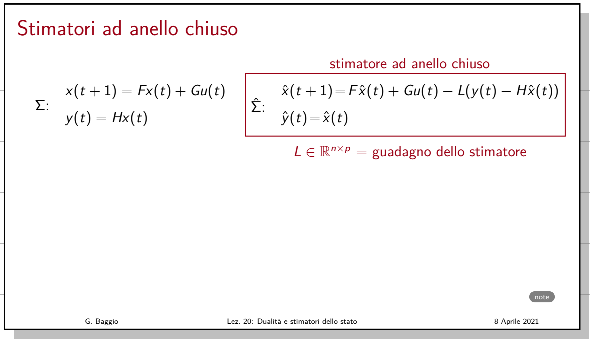
$$= F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

Evoluzione dell'errore di stima:

$$e(t+1) = Fe(t), \quad e(0) = e_0 \implies e(t) = F^t e_0$$

<u>N.B.</u>: Se F ha autovalori con modulo > 1 (Σ instabile) e $e_0 \neq 0$

$\implies e(t)$ può divergere in t! $\implies e(t) \longrightarrow \infty$ per $t \to \infty$!



$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Stimatore ad anello chiuso: $\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - \overbrace{L\,\underbrace{(y(t) - H\hat{x}(t))}}^{\text{termine correttivo}} \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}$

guadagno dello stimatore $\in \mathbb{R}^{n \times p}$

scostamento tra uscita vera e l'uscita stimata

Errore di stima:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)} - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu(t)} + L(\overset{Hx(t)}{\overset{\shortparallel}{y}}(t) - Hx(t))$$

$$= F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t))$$

$$= (F + LH)(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)\,e(t)$$

Evoluzione dell'errore di stima:

$$e(t) = (F + LH)^t e_0 \qquad e(0) = e_0$$

<u>N.B.</u> Anche se F è instabile ($\Rightarrow \Sigma$ instabile), $F + LH$ potrebbe avere autovalori con modulo < 1!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = (F, G, H)$$

Stimatore dead-beat? $L^* \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta_{F+LH}(\lambda) = \lambda^2$?

1) Esistenza stimatore dead-beat.

$\Updownarrow$

Σ ricostruibile

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathcal{O} = 2 \Rightarrow \Sigma \text{ osservabile}$$

$\Rightarrow \Sigma$ ricostruibile

$\Rightarrow \exists$ stimatore dead-beat

2) Calcolo $L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$ tale che $\Delta_{F+LH}(\lambda) = \lambda^2$.

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \ell_1 & -1-\ell_1 \\ -\ell_2 & \lambda - 1 - \ell_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - \ell_1)(\lambda - 1 - \ell_2) - \ell_2(1 + \ell_1)$$

$$= \lambda^2 + (-1 - \ell_2 - \ell_1)\lambda + \ell_1 + \cancel{\ell_1 \ell_2} - \ell_2 - \cancel{\ell_1 \ell_2}$$

$$= \lambda^2 + (-1 - \ell_2 - \ell_1)\lambda + \ell_1 - \ell_2$$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det \begin{bmatrix} \lambda - l_1 & -1-l_1 \\ -l_2 & \lambda - 1 - l_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - l_1)(\lambda - 1 - l_2) - l_2(1 + l_1)$$

$$= \lambda^2 + (-1 - l_2 - l_1)\lambda + l_1 + \cancel{l_1 l_2} - l_2 - \cancel{l_1 l_2}$$

$$= \lambda^2 + (-1 - l_2 - l_1)\lambda + l_1 - l_2 \overset{!}{=} \lambda^2$$

$$\begin{cases} -1 - l_2 - l_1 = 0 \\ l_1 - l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 = -\frac{1}{2} \\ l_2 = l_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad L^* = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

guadagno dello stimatore dead-beat