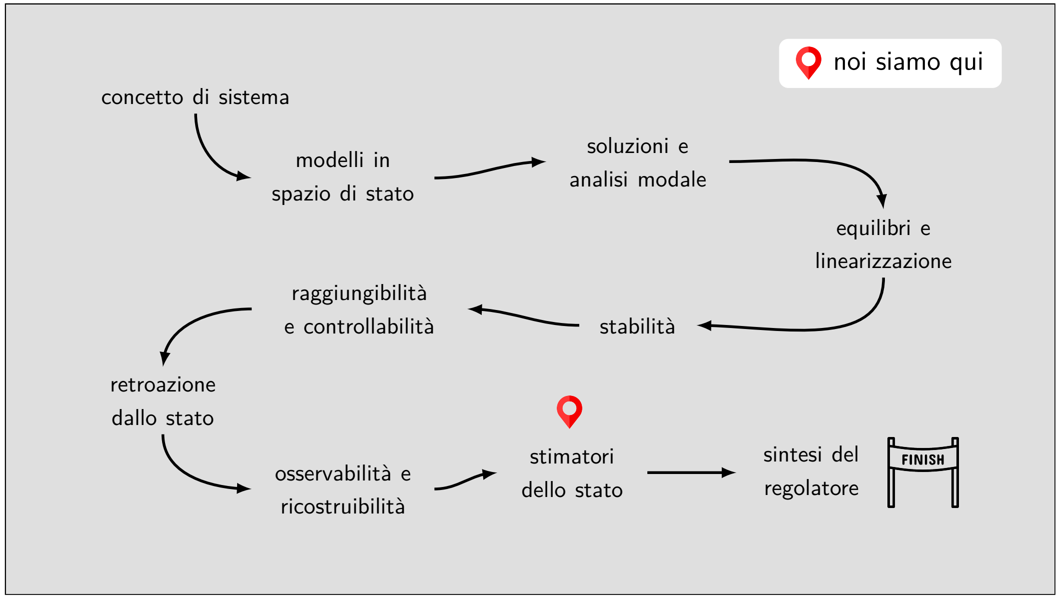
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

N.B. Qui consideriamo sistemi a t.d. ma tutto si applica a t.c.!

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} H^\top & F^\top H^\top & \cdots & (F^\top)^{n-1} H^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ FH \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{O}^\top$$

Σ_d raggiungibile
$\Updownarrow$
Σ osservabile

$$\mathrm{im}((F^\top)^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}_d \iff \ker(F^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$$

Σ_d controllabile
$\Updownarrow$
Σ ricostruibile

Sistema duale: osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^\top \\ G^\top F^\top \\ \vdots \\ G^\top (F^\top)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$$

Σ_d osservabile
$\Updownarrow$
Σ raggiungibile

$$\ker((F^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \mathrm{im}(F^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}$$

Σ_d ricostruibile
$\Updownarrow$
Σ controllabile

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

Σ_d non raggiungibile

Forma di Kalman di raggiungibilità

$$\begin{tikzcd} \Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_{K,d} = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\ \Sigma = (F, G, H) \arrow[r] & \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \end{tikzcd}$$

Σ non osservabile

Forma di Kalman di osservabilità
$(F_{22}, 0)$ sottosistema non osservabile

Dualità: test PBH di raggiungibilità/osservabilità

Test PBH di raggiungibilità

$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \longrightarrow$ Σ_d raggiungibile $\iff$ $\text{rank}[zI - F^\top \; H^\top] = n, \; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Big\updownarrow$ dualità

$\Sigma = (F, G, H) \longrightarrow$ Σ osservabile $\iff$ $\text{rank}\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \; \forall z \in \mathbb{C}$

Test PBH di osservabilità

Dualità: allocazione degli autovalori

$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \longrightarrow$ Σ_d raggiungibile $\iff$ $\exists\, K \in \mathbb{R}^{p \times n}$: $F^\top + H^\top K$ ha autovalori desiderati

$\Big\updownarrow$ dualità

$\Sigma = (F, G, H) \longrightarrow$ Σ osservabile $\iff$ $\exists\, L = K^\top \in \mathbb{R}^{n \times p}$: $F + LH$ ha autovalori desiderati

Proprietà equivalenti all'osservabilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale Σ_d è raggiungibile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
4. Gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

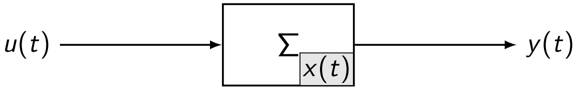
1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0$.
4. Esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

N.B. Parlare di ricostruibilità ha senso solo a t.d.!

Il problema della stima dello stato

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



Assunzione: lo stato $x(t)$ non è direttamente accessibile

Problema: costruire una "buona" stima $\hat{x}(t)$ di $x(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

Stimatori ad anello aperto

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

stimatore ad anello aperto

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

$$\boxed{\text{errore di stima } e(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty \text{ se } F \text{ è instabile !!!}}$$

Stimatori ad anello chiuso

stimatore ad anello chiuso

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad \boxed{\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ = guadagno dello stimatore

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

errore di stima $e(t)$ tende a zero se $F + LH$ è asintoticamente stabile (e in questo caso F può anche essere instabile) !!!

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!
2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!
3. Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.
4. Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

Il sistema è osservabile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con modulo < 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo < 1.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con parte reale < 0.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale < 0.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.