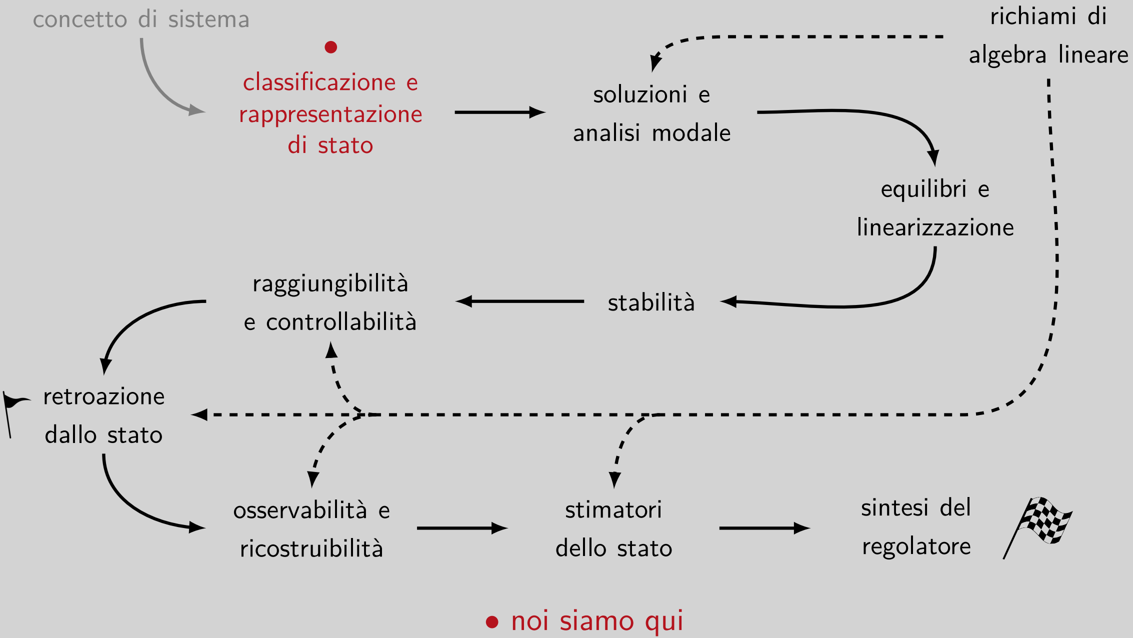
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Classificazione e Rappresentazione di Sistemi

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

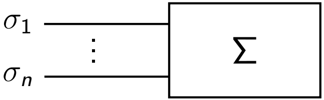

concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.

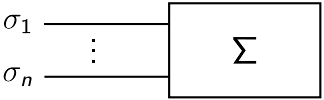


$\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

Esempio: $\Sigma =$ appartamento, $\sigma_1 =$ temp. cucina, $\sigma_2 =$ temp. soggiorno, ...

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.



$\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

$$\boxed{\Sigma = \text{Modello matematico che descrive la relazione tra } \sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n}$$

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.

$$u \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow y$$

In molti casi in $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ si possono distinguere variabili di:

ingresso/input u (causa) uscita/output y (effetto)

Esempio: automobile: $u =$ pedale acc. / sterzo, $y =$ posizione / velocità veicolo
motore elettrico: $u =$ tensione / corrente armatura, $y =$ posizione / velocità rotore

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) ***controllarlo***!

Ma perché usare la matematica?

Fornisce strumenti che permettono di descrivere e analizzare
in maniera ***quantitativa*** il comportamento di Σ

Classificazione dei sistemi

Σ

Deterministico: evoluzione delle variabili $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ determinato dal comportamento dalle variabili stesse in determinati intervalli temporali

Stocastico: leggi che legano variabili $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ di tipo probabilistico

Classificazione dei sistemi

Σ

Dinamico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende dall'evoluzione delle stesse in determinati intervalli

Statico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende solo dal valore assunto dalle stesse in t

Classificazione dei sistemi

Σ

dinamico

Causale: evoluzione di alcune variabili d'interesse (y) in t dipende del comportamento delle stesse e di altri variabili (u) in tempi $\leq t$

Non causale: $y(t)$ può dipendere da $y(s)$, $u(s)$, per $s > t$

Classificazione dei sistemi

Σ

Tempo invariante: legame tra variabili di interesse indipendente da t

Tempo variante: legame tra variabili di interesse dipendente da t

Classificazione dei sistemi

Σ

Lineare: legame tra variabili di interesse di tipo lineare

Non lineare: legame tra variabili di interesse non di tipo lineare

Classificazione dei sistemi

Σ

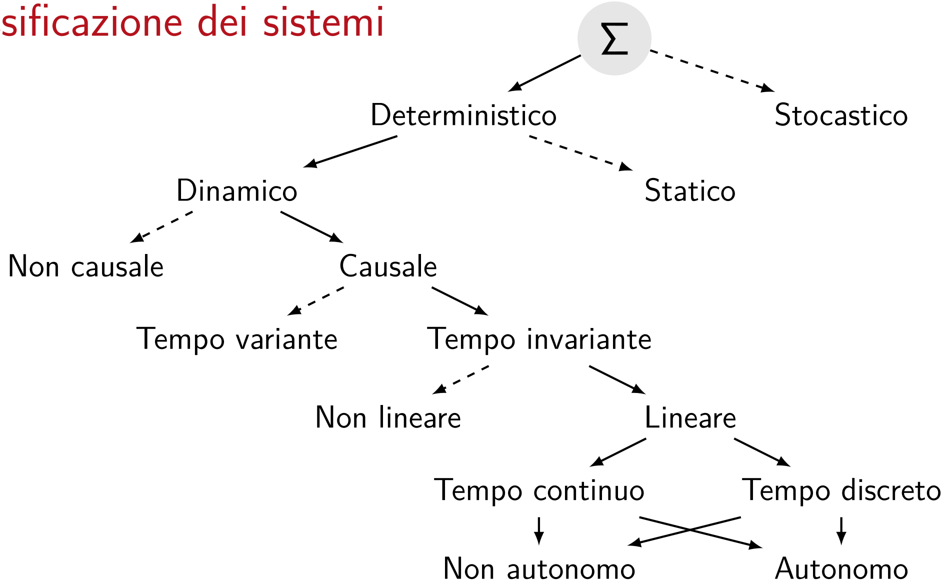
- **Tempo continuo:** variabile temporale $t \in \mathbb{R}$
- **Tempo discreto:** variabile temporale $t \in \mathbb{Z}$

Classificazione dei sistemi

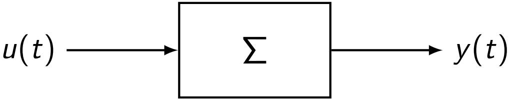
Σ

- **Autonomo:** non ci sono ingressi ($u = 0$)
- **Non autonomo:** ci sono ingressi ($u \neq 0$)

Classificazione dei sistemi



Rappresentazione esterna o I/O



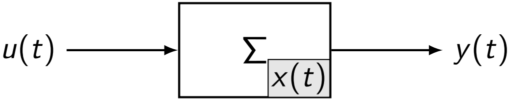
Tempo continuo: $h\left(y^{(n)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t), t\right) = 0 + \text{c.i.}$

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace) $G(s) = Y(s)/U(s)$

Tempo discreto: $h\left(y(t-t_n), \ldots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \ldots, u(t-1), u(t), t\right) = 0 + \text{c.i.}$

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta) $G(z) = Y(z)/U(z)$

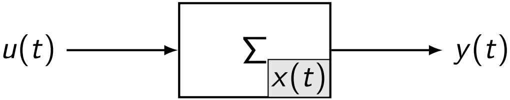
Rappresentazione interna o di stato



$x(t) =$ (vettore di) variabili di stato *(memoria interna!)*

Proprietà di separazione: $x(t)$ fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di Σ necessaria per valutare $x(t)$ e $y(t)$ ad istanti futuri (una volta noto $u(t)$).

Rappresentazione interna o di stato

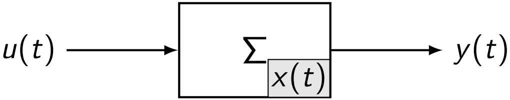


$x(t) =$ (vettore di) variabili di stato *(memoria interna!)*

Tempo continuo:
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

$f =$ mappa di transizione di stato $h =$ mappa di uscita

Rappresentazione interna o di stato

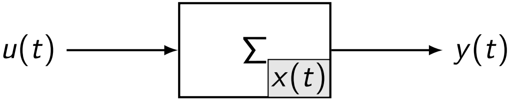


$x(t) =$ (vettore di) variabili di stato *(memoria interna!)*

Tempo discreto:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

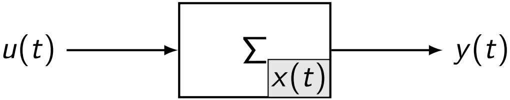
f = mappa di transizione di stato $\qquad$ h = mappa di uscita

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Sistemi LTI in spazio di stato

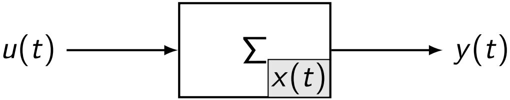


Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

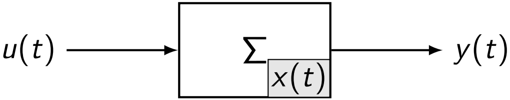
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

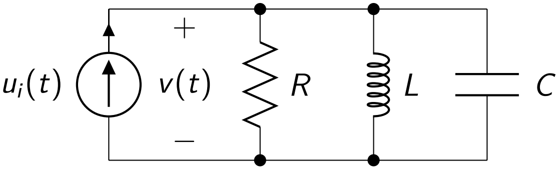
Sovrapposizione degli effetti

x', y' = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0' e ingresso u'

x'', y'' = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0'' e ingresso u''

$$\boxed{x_0 = \alpha_1 x_0' + \alpha_2 x_0'',\ u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'',\ y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''}$$

Circuito RLC



$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

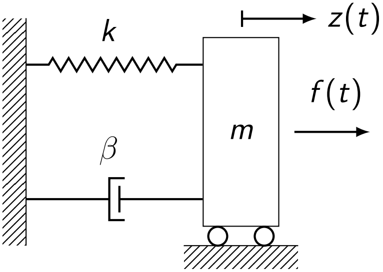
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = v,\ x_2 = i_L,\ u = u_i,\ y = x_1 = v$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

Massa-molla-smorzatore



$f(t) = \text{input},\ z(t) = \text{output}$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

Rappresentazione interna (di stato)

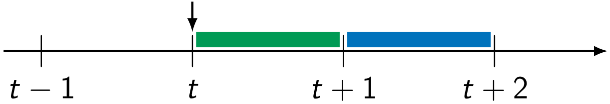
$$x_1 = z,\ x_2 = \dot{x},\ u = f,\ y = x_1 = z$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

Magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna



$y(t)$ = quantità merce in magazzino al tempo t
$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t
$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

$$u_1(t),\ u_2(t) = \text{input},\ y(t) = \text{output}$$

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

F.d.T. $G_1(z) = \dfrac{z^{-1}}{z-1}$, $G_2(z) = -\dfrac{1}{z-1}$

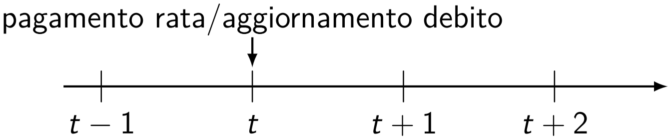
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estinzione debito



$y(t)$ = debito al tempo t = output
$u(t)$ = rata al tempo t = input
I = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna	Rappresentazione interna (di stato)
$y(t+1)-(1+I)y(t)+u(t+1)=0$	$x_1(t)=x(t)=y(t)+u(t)$
F.d.T. $G(z)=-\dfrac{z}{z-(1+I)}$	$F=1+I,\ G=-1-I$ $H=1,\ J=-1$