Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

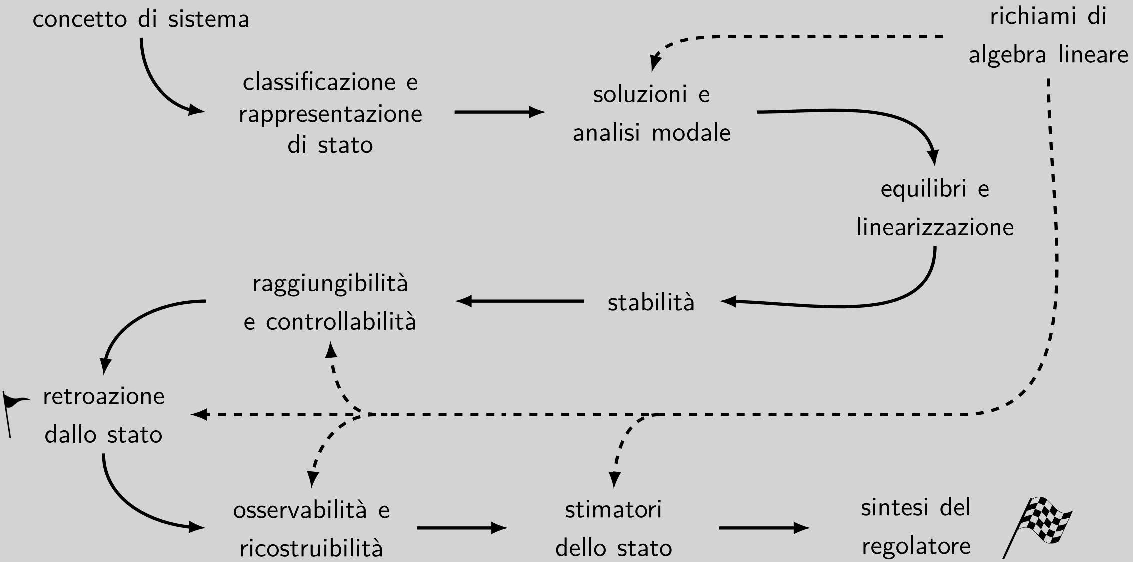
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

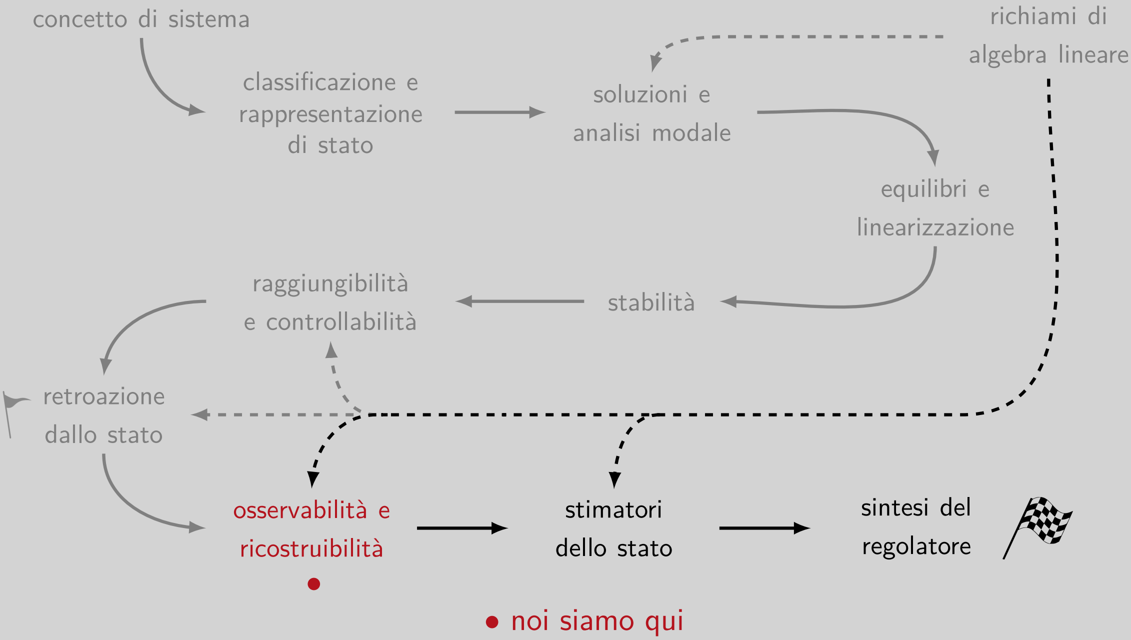
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

In questa lezione

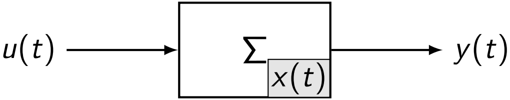
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

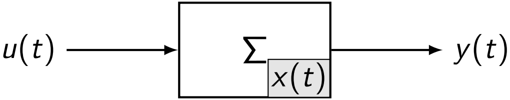
Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato $\overset{n\text{-dim}}{x(t)}$, ingresso $\overset{m\text{-dim}}{u(t)}$ e uscita $\overset{p\text{-dim}}{y(t)}$



Osservabilità e ricostruibilità

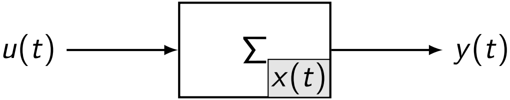
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Osservabilità $=$ possibilità di stimare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

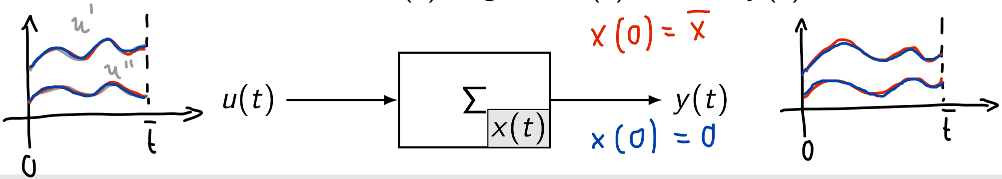


Osservabilità $=$ possibilità di stimare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

Ricostruibilità $=$ possibilità di stimare lo stato finale $x(\bar{t})$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

Stati e spazi non osservabili

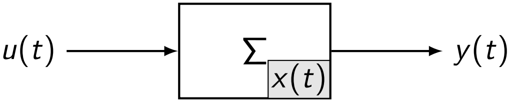
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice non osservabile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}$ coincide su $[0, \bar{t}]$ con l'uscita corrispondente allo stato iniziale $x(0) = 0$.

Stati e spazi non osservabili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

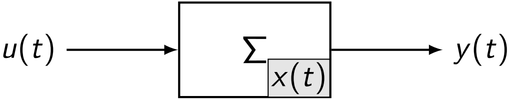


Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice non osservabile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}$ coincide su $[0, \bar{t}]$ con l'uscita corrispondente allo stato iniziale $x(0) = 0$.

Definizione: L'insieme di tutti gli stati non osservabili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto spazio non osservabile in $[0, \bar{t}]$.

Stati indistinguibili (nel futuro)

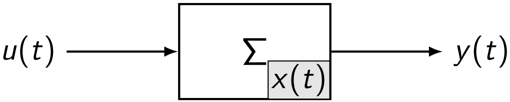
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Due stati $\bar{x}'$ e $\bar{x}''$ si dicono indistinguibili (nel futuro) nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}''$ coincidono su $[0, \bar{t}]$.

Stati indistinguibili (nel futuro)

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

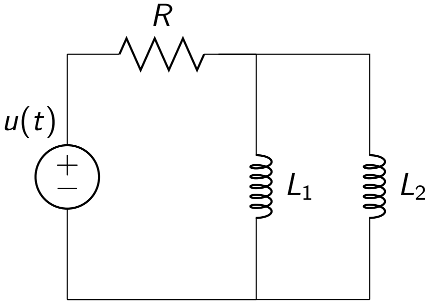


Definizione: Due stati $\bar{x}'$ e $\bar{x}''$ si dicono indistinguibili (nel futuro) nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}''$ coincidono su $[0, \bar{t}]$.

stato non osservabile $=$ *stato indistinguibile da zero*

Esempio introduttivo

extra



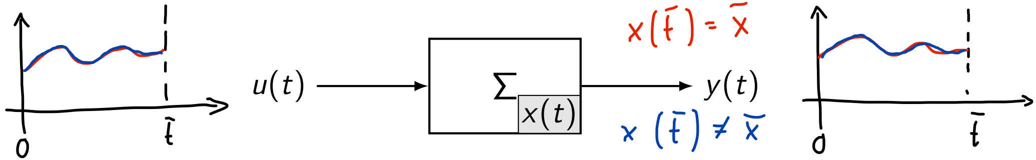
$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \text{è non osservabile } \forall t > 0$$

Stati e spazi non ricostruibili

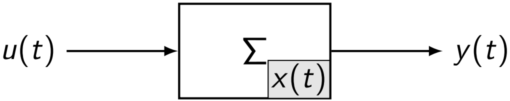
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice non ricostruibile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se ogni ingresso $u(\cdot)$ e uscita $y(\cdot)$ in $[0, \bar{t}]$ "compatibili" con un'evoluzione di stato $x'(t)$ con stato finale $x'(\bar{t}) = \bar{x}$ sono anche "compatibili" con un'evoluzione di stato $x''(t)$ con $x''(\bar{t}) \neq \bar{x}$.

Stati e spazi non ricostruibili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice non ricostruibile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se ogni ingresso $u(\cdot)$ e uscita $y(\cdot)$ in $[0, \bar{t}]$ "compatibili" con un'evoluzione di stato $x'(t)$ con stato finale $x'(\bar{t}) = \bar{x}$ sono anche "compatibili" con un'evoluzione di stato $x''(t)$ con $x''(\bar{t}) \neq \bar{x}$.

Definizione: L'insieme di tutti gli stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto spazio non ricostruibile in $[0, \bar{t}]$.

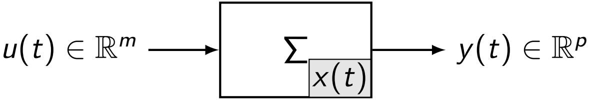
In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

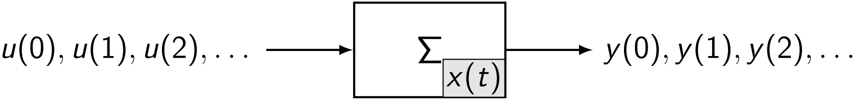
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k)}_{\text{ev. forzata}} = HF^t x_0 + H\mathcal{R}_t u_t$$

Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = \bar{x}$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$$y(k) = HF^k\bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$\boxed{\text{Insieme di stati } \bar{x} \text{ non osservabili da misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}?}$

$\boxed{\text{Quando possiamo osservare tutti i possibili stati } \bar{x} \in \mathbb{R}^n?}$

Spazio non osservabile

extra

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = HF^k\bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Spazio non osservabile

extra

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = HF^k\bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$y(k) - y_0(k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1 \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathcal{O}_t} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \bar{x} \in \ker \mathcal{O}_t$$

$\mathcal{O}_t$ = matrice di osservabilità in t passi

Spazio non osservabile

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)$$
$$\text{(o nell'intervallo } [0, t-1])$$
$$\text{(o con } t \text{ misure)}$$

Spazio non osservabile

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)$$
$$\text{(o nell'intervallo } [0, t-1])$$
$$\text{(o con } t \text{ misure)}$$

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

Spazio non osservabile

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)$$
$$\text{(o nell'intervallo } [0, t-1])$$
$$\text{(o con } t \text{ misure)}$$

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

minimo

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = (\cancel{\text{massimo}}) \text{ spazio non osservabile}$$

Criterio di osservabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

Criterio di osservabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \updownarrow \end{bmatrix}$$

Criterio di osservabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$p = 1\text{: } \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

$$p > 1\text{: } \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\underbrace{\mathcal{O}^\top \mathcal{O}}_{n \times n}) \neq 0$$

Esempi

extra

1. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

2. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\implies$ non osservabile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\implies$ osservabile (in 2 passi)

Osservabilità ed equivalenza algebrica

extra

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z=T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \; \bar{H} = HT$$

Osservabilità ed equivalenza algebrica

extra

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z=T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \ \bar{H} = HT$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{O}}) = \text{rank}(\mathcal{O}) \implies$ cambio di base non modifica l'osservabilità !!

Osservabilità ed equivalenza algebrica

extra

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z=T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT,\ \bar{H} = HT$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

$\mathrm{rank}(\bar{\mathcal{O}}) = \mathrm{rank}(\mathcal{O}) \implies$ cambio di base non modifica l'osservabilità !!

Inoltre, se Σ osservabile: $\quad \mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^\top \mathcal{O} T \implies T = (\mathcal{O}^\top \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}}$

Calcolo dello stato iniziale

extra

Se Σ è osservabile in t passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

Calcolo dello stato iniziale

extra

Se Σ è osservabile in t passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

$$y_\ell(k) = HF^k\bar{x} = y(k) - H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{t-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \mathcal{O}_t \bar{x} \implies \bar{x} = (\mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t)^{-1} \mathcal{O}_t^\top \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_t \triangleq \mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t = \text{Gramiano di osservabilità in } t \text{ passi}$$

Esempi

extra

1. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Calcolare $x(0)$ dalle misure $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ e $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y(2) = 2$?

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

Calcolare $x(0)$ dalle misure $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ e $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y(2) = 2$?

Poichè il sistema è osservabile lo stato iniziale è unico e pari a $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Indistinguibilità

$$x(0) = \bar{x}', \; u(\cdot) \quad \Longrightarrow \quad y'(k) = HF^k\bar{x}' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$x(0) = \bar{x}'', \; u(\cdot) \quad \Longrightarrow \quad y''(k) = HF^k\bar{x}'' + \mathcal{R}_k u_k$$

Indistinguibilità

$$x(0) = \bar{x}',\ u(\cdot) \quad \Longrightarrow \quad y'(k) = HF^k\bar{x}' + \overset{H}{\mathcal{R}_k} u_k$$

$$x(0) = \bar{x}'',\ u(\cdot) \quad \Longrightarrow \quad y''(k) = HF^k\bar{x}'' + \overset{H}{\mathcal{R}_k} u_k$$

$$\begin{aligned} \bar{x}',\ \bar{x}'' \text{ indistinguibili in } t \text{ passi} &\Longrightarrow y'(k) = y''(t), \qquad k = 0, 1, \dots, t-1 \\ &\Longrightarrow HF^k(\bar{x}' - \bar{x}'') = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-1 \\ &\Longrightarrow \bar{x}' - \bar{x}'' \in X_{NO}(t) \end{aligned}$$

$\boxed{\bar{x} + X_{NO}(t)\text{: classe di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } \bar{x}}$

$\boxed{\bar{x} + X_{NO}\text{: classe di stati indistinguibili da } \bar{x}}$

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0$$

$$u(0), u(1), u(2), \dots \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad \boxed{x(t)}} \longrightarrow y(0), y(1), y(2), \dots$$

$$y(k) = \underbrace{HF^k x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{H\mathcal{R}_k u_k}_{\text{ev. forzata}}, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0$$

$$u(0), u(1), u(2), \dots \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(0), y(1), y(2), \dots$$

$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati $\bar{x} = x(t-1)$ ricostruibili da misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}$, $\{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$?

Quando possiamo ricostruire tutti i possibili stati $\bar{x} = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$?

Spazio non ricostruibile

extra

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

Spazio non ricostruibile

extra

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

parte indet. parte calcolabile

$$x(t-1) = F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$F^{t-1}X_{NO}(t) = \text{insieme di stati non ricostruibili in } t \text{ passi}$$

Spazio non ricostruibile

$$X_{NR}(t) = \text{spazio non ricostruibile in } t \text{ passi} = \{F^{t-1}x,\ x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$$
$$\text{(o nell'intervallo } [0, t-1])$$
$$\text{(o con } t \text{ misure)}$$

Teorema: Gli spazi non ricostruibili soddisfano:

$$X_{NR}(1) \supseteq X_{NR}(2) \supseteq X_{NR}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NR}(i) = X_{NR}(j), \quad \forall j \geq i.$$

minimo

$X_{NR} \triangleq X_{NR}(i) =$ (~~massimo~~) spazio non ricostruibile

Criterio di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

Criterio di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

Criterio di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

$$\Sigma \text{ osservabile } (X_{NO} = \{0\}) \Rightarrow \Sigma \text{ ricostruibile}$$

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ osservabile !!!}$$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ non osservabile
ma ricostruibile se $f_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

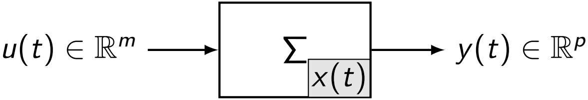
$\Longrightarrow$ osservabile e (quindi) ricostruibile

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Osservabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$
$$x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$



$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}\bar{x}}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau}_{\text{ev. forzata}}$$

Osservabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$
$$x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$y(t) = He^{Ft}\bar{x} + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$\boxed{\text{Insieme di stati } \bar{x} \text{ NON osservabili da misure nell'intervallo } [0, t]?}$

$\boxed{\text{Quando possiamo osservare tutti i possibili stati } \bar{x} \in \mathbb{R}^n?}$

Criterio di osservabilità

extra

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$$X_{NO} = \text{(massimo) spazio non osservabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

Criterio di osservabilità

extra

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$$X_{NO} = \text{(massimo) spazio non osservabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

osservabile

$$\boxed{\Sigma \quad \iff \quad \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \quad \iff \quad \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

Criterio di osservabilità

extra

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$X_{NO} =$ (minimo ~~massimo~~) spazio non osservabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

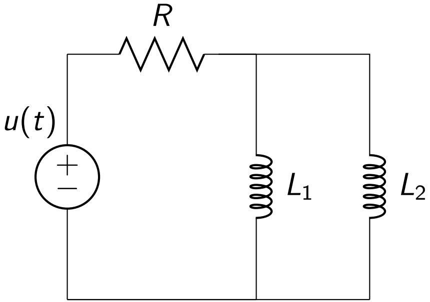
osservabile

Σ ~~raggiungibile~~ $\iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \mathrm{rank}(\mathcal{O}) = n$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$!!

Esempio

extra



$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

Spazio non ricostruibile a t.c.

?

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

misure $u(\tau)$, $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$

sol. particolare

stati iniziali compatibili con le misure: $\underline{x(0) = x_0 + X_{NO}(t)}$

Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

misure $u(\tau),\ y(\tau),\ \tau \in [0, t]$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

parte calcolabile

$$x(t) = e^{Ft}\overset{x_0}{\cancel{x(0)}} + \underbrace{e^{Ft}X_{NO}(t)}_{\text{parte indet.}} + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t)$ = insieme di stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, t]$

Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\text{misure } u(\tau),\ \ y(\tau),\ \tau \in [0,t]$$

$$\text{stati iniziali compatibili con le misure: } x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$$

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$X_{NR}(t) {=} e^{Ft}X_{NO}(t) = \text{insieme di stati non ricostruibili nell'intervallo } [0,t]$$

$$e^{Ft} \text{ invertibile } \implies X_{NR}(t) = X_{NO}(t)$$

osservabilità = ricostruibilità !!

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

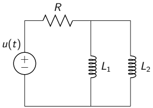
A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio introduttivo

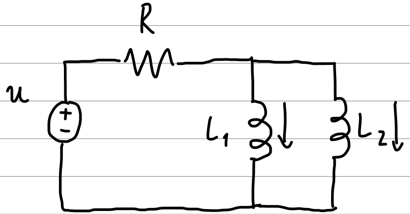
extra



$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è non osservabile $\forall t > 0$



$x_1 = i_{L_1}$ $x_2 = i_{L_2}$

$y(t) = i_R = i_{L_1} + i_{L_2}$

$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dt} i_{L_1} = \frac{1}{L_1} v_{L_1} = \frac{1}{L_1}\left(u - v_R\right) = \frac{1}{L_1}\left(u - R\, i_R\right)$$

$$= \frac{1}{L_1}\left(u - R\left(i_{L_1} + i_{L_2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{L_1}\left(u - R\left(x_1 + x_2\right)\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dt} i_{L_2} = \frac{1}{L_2}\left(u - R\left(x_1 + x_2\right)\right)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

$$y(t) = H e^{Ft} x(0) + \int_0^t H e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$x(0) = 0: \qquad y_0(t) = \int_0^t H e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = y_0(t) \qquad \forall\, t \in [0, \tilde{t}]$$

$$y(t) - y_0(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, \bar{t}]$$

$$\downarrow$$

$$H e^{Ft} x(0) = 0 \qquad \forall t \in [0, \bar{t}]$$

$$e^{Ft} = I + F + \frac{t^2}{2} F^2 + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{R^2}{L_1^2} + \frac{R^2}{L_1 L_2}$$

$$b = \frac{R^2}{L_2^2} + \frac{R^2}{L_1 L_2}$$

back

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1+c_1 & c_1 \\ c_2 & 1+c_2 \end{bmatrix}$$

$$He^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+c_1 & c_1 \\ c_2 & 1+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+c_1+c_2 & 1+c_1+c_2 \end{bmatrix}$$

$x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad He^{Ft}x(0) = 0$

$\hookrightarrow$ stati NON osservabili

Spazio non osservabile

extra

$x(0) = \bar{x}$: $\quad y(k) = HF^k\bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$

$x(0) = 0$: $\quad y_0(k) = H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$

back

$$x(0) = \bar{x} : \quad y(k) = HF^k\bar{x} + HR_k u_k \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$x(0) = 0 : \quad y_0(k) = HR_k u_k \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$\bar{x}$ è NON osservabile $\Rightarrow$ $y(k) - y_0(k) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots, t-1$

$$\| $$

$$HF^k\bar{x} = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

back

$$\Rightarrow \quad \bar{x} \in \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix} = O_t = \text{matrice di osservabilità in } t \text{ passi (con } t \text{ misure)}$$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

back

1) $x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}}^{F} x(t)$

$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x(t)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = 0 \implies \Sigma$ non è osservabile $(\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R})$

2) $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

back

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = 1 \neq 0 \Rightarrow \Sigma$ osservabile $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

Osservabilità ed equivalenza algebrica

extra

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z = T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT,\ \bar{H} = HT$$

back

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = H\,x(t) \end{cases}$$

$$z = T^{-1}x$$

$$\begin{cases} z(t+1) = T^{-1}FTz(t) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = HTz(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HT \\ H\cancel{T}\cancel{T^{-1}}FT \\ \vdots \\ H\cancel{T}\cancel{T^{-1}}F^{n-1}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HT \\ HFT \\ \vdots \\ HF^{n-1}T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}}_{O} T \quad (*)$$

Σ osservabile

$$(*) \qquad O^T \bar{O} = \underbrace{O^T O}_{} \, T \quad \Longrightarrow \quad T = (O^T O)^{-1} O^T \bar{O}$$

$$\det \underbrace{(O^T O)}_{n \times n} \neq 0$$

Calcolo dello stato iniziale

extra

Se Σ è osservabile in t passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

back

Σ osservabile in t passi

Misure: $u(0), u(1), \dots, u(t-1)$

$y(0), y(1), \dots, y(t-1)$

$$y(k) = \underbrace{H F^k \bar{x}}_{y_\ell(k)} + \underbrace{H R_k u_k}_{y_f(k)} \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y_\ell(k) = y(k) - y_f(k)$$

back

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{O_t} \bar{x}$$

$$O_t^T \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \underbrace{O_t^T O_t}_{\det(O_t^T O_t) \neq 0} \bar{x} \implies \bar{x} = (O_t^T O_t)^{-1} O_t^T \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix}$$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

   Calcolare $x(0)$ dalle misure $u(0) = 1,\ u(1) = 1$ e $y(0) = 1,\ y(1) = 2,\ y(2) = 2$?

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$u(0) = u(1) = 1$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = y(2) = 2$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma \text{ è osservabile}$$

$$y_\ell(0) = y(0) = 1$$

$$y_\ell(1) = y(1) - HGu(0) = 2 - 1 = 1$$

$$y_\ell(2) = y(2) - \underbrace{HGu(1)}_{=1} - \overset{0}{\cancel{HFG}}u(0) = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{x} = \underbrace{(O^T O)^{-1}}_{I} O^T \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spazio non ricostruibile

extra

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

back

$$x(t-1) = F^{t-1} x(0) + R_{t-1} u_{t-1}$$

Dati: $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \quad \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$

$$\downarrow$$

$$x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$$

Se Σ osservabile in t passi $x(0) = x_0$

Se Σ non è osservabile:

$$x(t-1) = F^{t-1}(x_0 + X_{NO}(t)) + R_{t-1} u_{t-1}$$

back

$$= F^{t-1} x_0 + F^{t-1} X_{NO}(t) + R_{t-1} u_{t-1}$$

$x(t-1)$ univocamente determinato $\iff F^{t-1} X_{NO}(t) = 0$

Se $\ker F^{t-1} \supseteq \underset{\ker O_t}{\underset{\parallel}{X_{NO}(t)}} \implies \bar{x} = x(t-1)$ ricostruibile in t passi (o con t misure)

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

back

1) $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t) \qquad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

Σ ricostruibile $\iff \ker F^2 \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \qquad X_{NO} = \ker \mathcal{O} = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$F^2 = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^2 & f_1 + f_2 \\ 0 & f_2^2 \end{bmatrix}$

back

$$\ker F^2 = \begin{cases} \{0\} & f_1, f_2 \neq 0 \\ \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ -f_1 \end{bmatrix} & f_1 \neq 0,\ f_2 = 0 \\ \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & f_1 = 0,\ f_2 \neq 0 \\ \mathbb{R}^2 & f_1 = f_2 = 0 \end{cases}$$

(first two cases) $\ker F^2 \not\supseteq \ker O$ $\quad \Sigma$ non è ricostr.

(last two cases) $\ker F^2 \supseteq \ker O$ $\quad \Sigma$ è ricostr.

2) $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det O \neq 0 \Rightarrow \Sigma$ osservabile $\Rightarrow \Sigma$ ricostruibile

Criterio di osservabilità

extra

$X_{NO}(t)$ = spazio non osservabile nell'intervallo $[0, t]$

X_{NO} = (massimo) spazio non osservabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

back

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(t) = He^{Ft}\bar{x} + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(t) = \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau$$

$\bar{x}$ NON osservabile nell'intervallo $[0, t]$

$$\iff y(\tau) = y_0(\tau) \quad \forall \tau \in [0, t]$$

$$\iff y(\tau) - y_0(\tau) = 0 \quad \text{"}$$

$$\iff He^{F\tau}\bar{x} = 0 \quad \text{"}$$

$$\iff H\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} F^k\right)\bar{x} = 0 \quad \text{"}$$

back

$$\Longleftrightarrow H\bar{x} + \tau H F \bar{x} + \frac{\tau^2}{2} H F^2 \bar{x} + \dots = 0$$

$$\forall \tau \in [0,t]$$

Principio d'identità delle serie di potenze:

$$\left\{\begin{array}{l} H\bar{x} = 0 \\ HF\bar{x} = 0 \\ HF^2\bar{x} = 0 \\ \vdots \\ HF^{n-1}\bar{x} = 0 \\ \cancel{HF^n\bar{x} = 0} \\ \vdots \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \bar{x} \in \ker \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}}$$

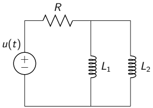
Teorema di Cayley-Hamilton:

$$F^k = \alpha_0 I + \alpha_1 F + \dots + \alpha_{n-1} F^{n-1}$$

$$k \geq n$$

Esempio

extra



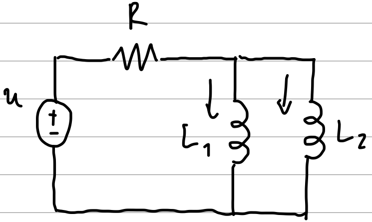
$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma$ non osservabile

back



$$x_1 = i_{L_1} \qquad x_2 = i_{L_2}$$

$$y = i_{L_1} + i_{L_2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}}^{F} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) & -R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) \end{bmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = 0 \Rightarrow \Sigma$ è NON osserv.

back

$$X_{NO} = \operatorname{Ker} O = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$