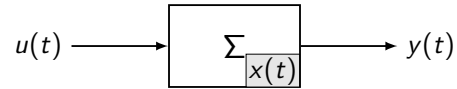


Stati e spazi non osservabili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

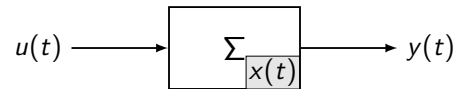


Definizione: Uno stato \bar{x} si dice non osservabile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}$ coincide su $[0, \bar{t}]$ con l'uscita corrispondente allo stato iniziale $x(0) = 0$.

Definizione: L'insieme di tutti gli stati non osservabili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto spazio non osservabile in $[0, \bar{t}]$.

Stati indistinguibili (nel futuro)

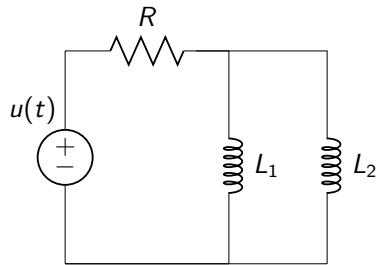
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Due stati \bar{x}' e \bar{x}'' si dicono indistinguibili (nel futuro) nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}''$ coincidono su $[0, \bar{t}]$.

stato non osservabile = stato indistinguibile da zero

Esempio introduttivo



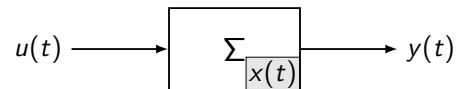
$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{è non osservabile } \forall t > 0$$

Stati e spazi non ricostruibili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

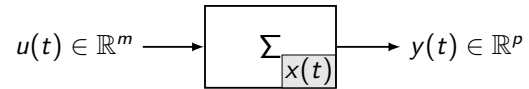


Definizione: Uno stato \bar{x} si dice non ricostruibile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se ogni ingresso $u(\cdot)$ e uscita $y(\cdot)$ in $[0, \bar{t}]$ "compatibili" con un'evoluzione di stato $x'(t)$ con stato finale $x'(\bar{t}) = \bar{x}$ sono anche "compatibili" con un'evoluzione di stato $x''(t)$ con $x''(\bar{t}) \neq \bar{x}$.

Definizione: L'insieme di tutti gli stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto spazio non ricostruibile in $[0, \bar{t}]$.

Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

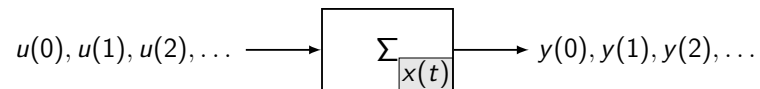
$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$



$$y(t) = HF^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) = HF^t x_0 + H\mathcal{R}_t u_t$$

Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) &= \bar{x} \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$



$$y(k) = HF^k \bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati \bar{x} osservabili da misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Spazio non osservabile

$$x(0) = \bar{x}: y(k) = HF^k \bar{x} + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = 0: y_0(k) = HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y(k) - y_0(k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-1 \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathcal{O}_t} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \bar{x} \in \ker \mathcal{O}_t$$

$\mathcal{O}_t =$ matrice di osservabilità in t passi

Spazio non osservabile

$X_{NO}(t) =$ spazio non osservabile in t passi $= \ker(\mathcal{O}_t)$
(o nell'intervallo $[0, t-1]$)
(o con t misure)

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) =$ (minimo) spazio non osservabile

Criterio di osservabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n =$ matrice di osservabilità del sistema

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

$$p = 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

$$p > 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}^\top \mathcal{O}) \neq 0$$

Esempi

$$\begin{aligned} 1. \quad x(t+1) &= \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \implies \text{non osservabile}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x(t+1) &= \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \implies \text{osservabile (in 2 passi)}$$

Osservabilità ed equivalenza algebrica

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z=T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{H} = HT$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{O}}) = \text{rank}(\mathcal{O}) \implies$ cambio di base non modifica l'osservabilità !!

Inoltre, se Σ osservabile: $\mathcal{O}^T \bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^T \mathcal{O}T \implies T = (\mathcal{O}^T \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^T \bar{\mathcal{O}}$

Calcolo dello stato iniziale

Se Σ è osservabile in t passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

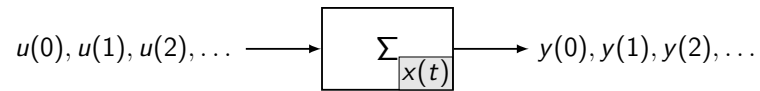
$$y_\ell(k) = HF^k \bar{x} = y(k) - HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{t-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \mathcal{O}_t \bar{x} \implies \bar{x} = (\mathcal{O}_t^T \mathcal{O}_t)^{-1} \mathcal{O}_t^T \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{V}_t \triangleq \mathcal{O}_t^T \mathcal{O}_t =$ Gramiano di osservabilità in t passi

Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

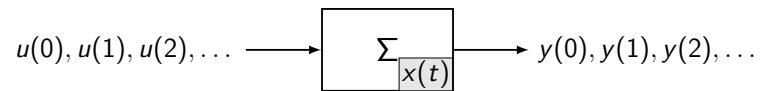
$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$



$$y(k) = HF^k x_0 + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$



$$y(k) = HF^k x_0 + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati $\bar{x} = x(t-1)$ ricostruibili da misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$?

Quando possiamo ricostruire tutti i possibili stati $\bar{x} = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$?

Critério di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}$$

Σ osservabile ($X_{NO} = \{0\}$) \Rightarrow Σ ricostruibile

Σ ricostruibile \nRightarrow Σ osservabile !!!

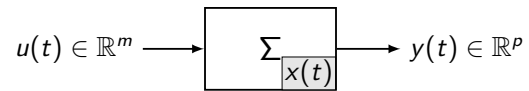
Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t)$, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$
 $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$ \implies non osservabile
ma ricostruibile se $f_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t)$, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$
 $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ \implies osservabile e (quindi) ricostruibile

Osservabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}\quad x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$



$$y(t) = He^{Ft}\bar{x} + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

Insieme di stati \bar{x} osservabili da misure nell'intervallo $[0, t]$?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di osservabilità

$X_{NO}(t)$ = spazio non osservabile nell'intervallo $[0, t]$

X_{NO} = (minimo) spazio non osservabile

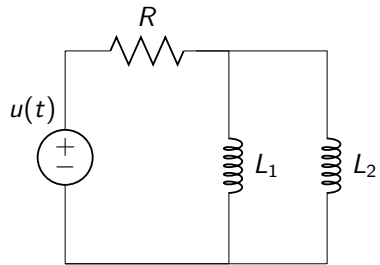
Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$!!

Esempio



$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

$$\text{misure } u(\tau), y(\tau), \tau \in [0, t]$$

$$\text{stati iniziali compatibili con le misure: } x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

$$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t) = \text{insieme di stati non ricostruibili nell'intervallo } [0, t]$$

$$e^{Ft} \text{ invertibile} \implies X_{NR}(t) = X_{NO}(t)$$

osservabilità = ricostruibilità !!
