Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

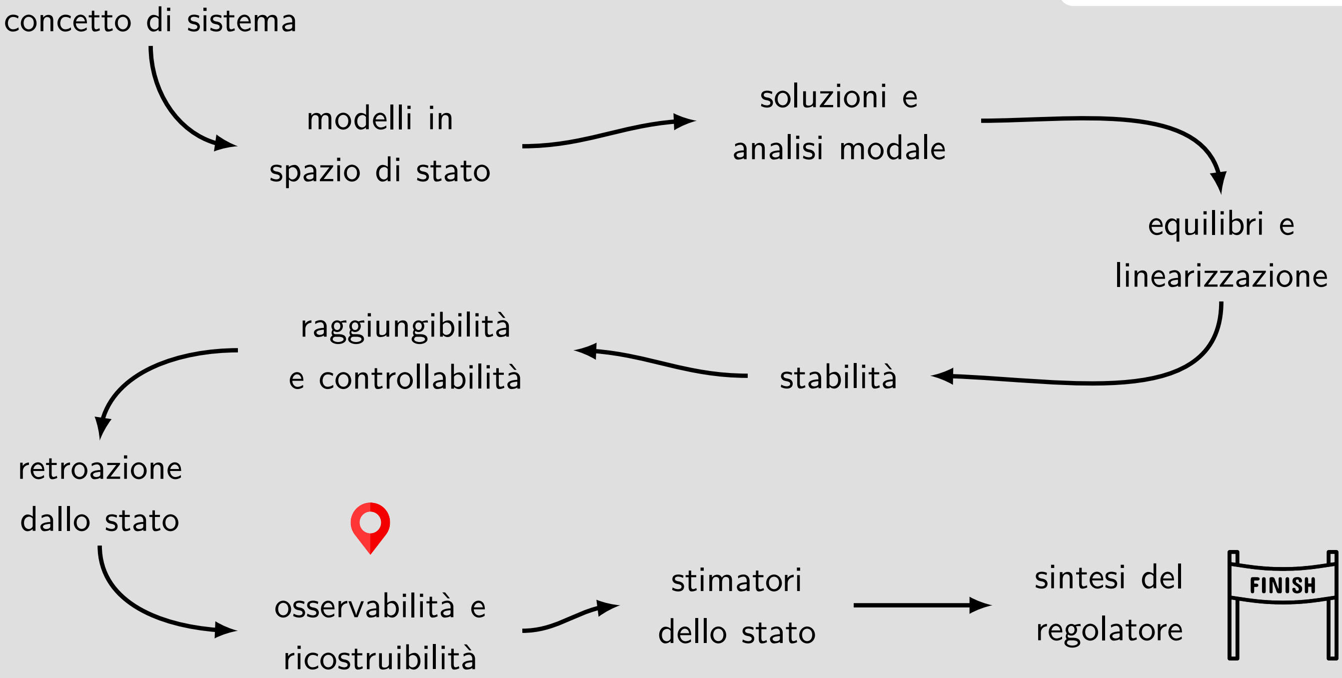
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

noi siamo qui



concetto di sistema

modelli in spazio di stato

soluzioni e analisi modale

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

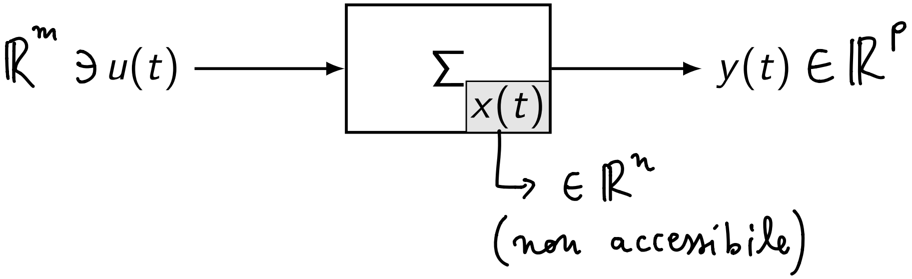
sintesi del regolatore

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

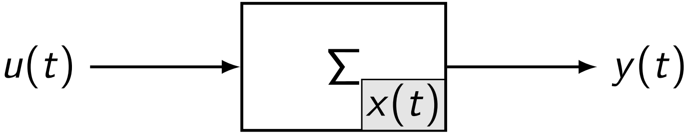
Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Osservabilità e ricostruibilità

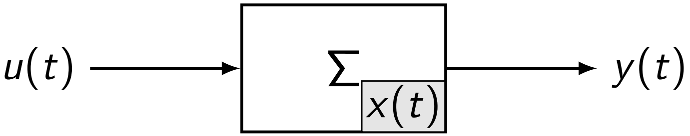
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Osservabilità = possibilità di determinare lo **stato iniziale** $x_0 = x(t_0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

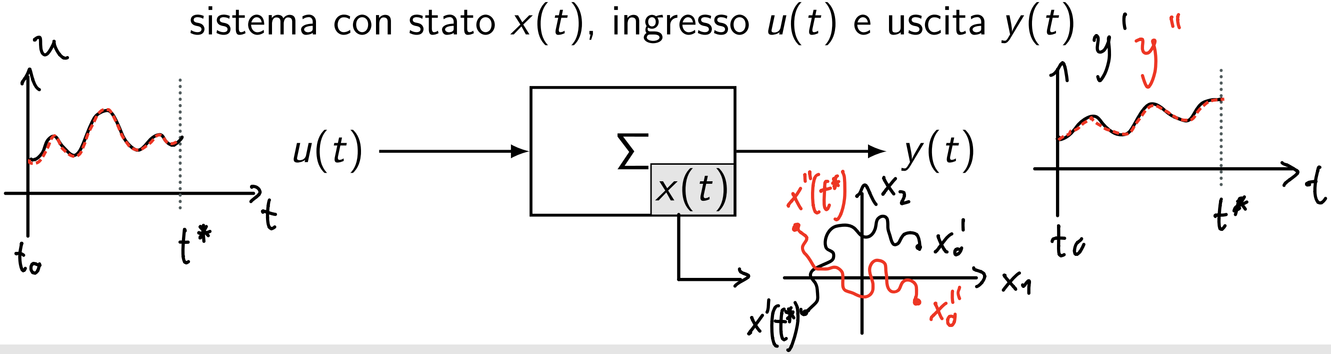


Osservabilità = possibilità di determinare lo **stato iniziale** $x_0 = x(t_0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Ricostruibilità = possibilità di determinare lo **stato finale** $x^* = x(t^*)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Stati indistinguibili e non osservabili

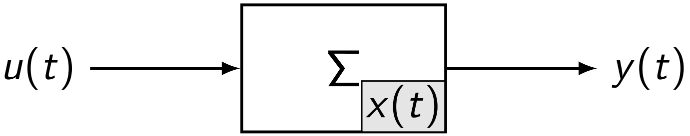
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato x_0' si dice indistinguibile dallo stato x_0'' in $[t_0, t^*]$ se, per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0''$ coincidono su $[t_0, t^*]$.

Stati indistinguibili e non osservabili

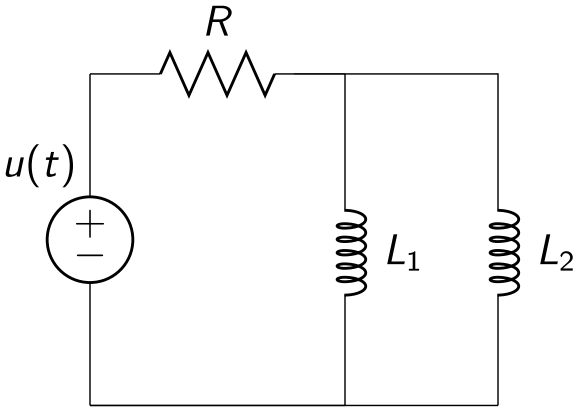
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato x_0' si dice indistinguibile dallo stato x_0'' in $[t_0, t^*]$ se, per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0''$ coincidono su $[t_0, t^*]$.

Definizione: Uno stato x_0 si dice non osservabile nell'intervallo $[t_0, t^*]$ se è indistinguibile dallo stato $x(t_0) = 0$.

Esempio introduttivo



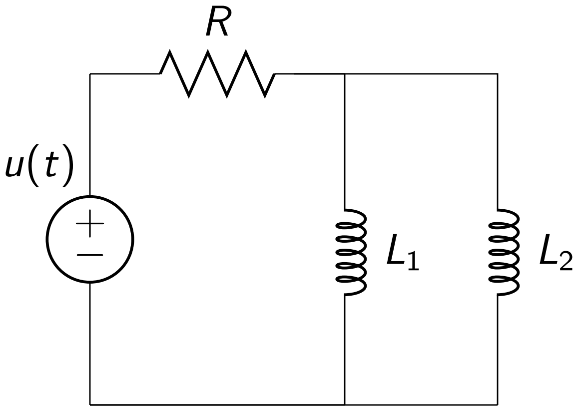
$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$t_0 = 0,\ L_1 = L_2 = L$$

note

Esempio introduttivo



$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$t_0 = 0,\ L_1 = L_2 = L$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \text{è non osservabile in } [0,t],\ \forall t > 0$$

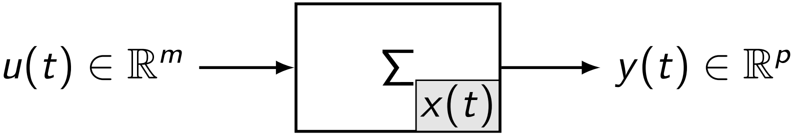
note

In questa lezione

- Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Osservabilità di sistemi LTI a tempo discreto

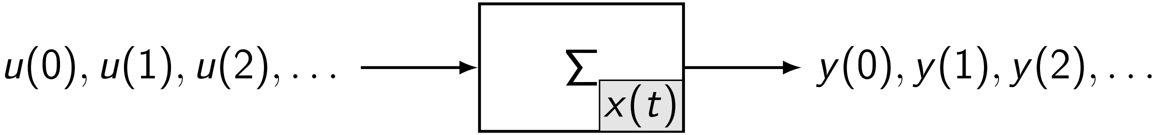
$$\left|\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}\right. \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k)}_{\text{ev. forzata}} = HF^t x_0 + H\mathcal{R}_t u_t$$

Osservabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati iniziali indistinguibili da x_0 in $[0, t-1]$ ($=$ in t passi)?

Quando possiamo determinare univocamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Stati indistinguibili

$$x(0) = x_0: \quad y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = x_0': \quad y'(k) = HF^k x_0' + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

note

Stati indistinguibili

$$x(0) = x_0: \quad y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = x_0': \quad y'(k) = HF^k x_0' + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y'(k) - y(k) = 0, \ \forall k \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq \, \mathcal{O}_t \; = \; \text{matrice di osservabilità in } t \text{ passi}} (x_0' - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_0' - x_0 \in \ker \mathcal{O}_t$$

$$\boxed{x_0 + \ker \mathcal{O}_t = \{x_0 + x, x \in \ker \mathcal{O}_t\} = \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0}$$

note

Spazio non osservabile

$\cancelto{0}{x_0} + \ker \mathcal{O}_t$

$$
\begin{aligned}
X_{NO}(t) &= \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0 = 0 \\
&= \text{insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\
&= \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)
\end{aligned}
$$

Spazio non osservabile

$$\begin{aligned} X_{NO}(t) &= \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0 = 0 \\ &= \text{insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\ &= \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t) \end{aligned}$$

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots \qquad X_{NO}(t+1) \subseteq X_{NO}(t) \ \forall t$$

$\mapsto \dim \Sigma$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

Spazio non osservabile

$$\begin{aligned} X_{NO}(t) &= \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0 = 0 \\ &= \text{insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\ &= \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t) \end{aligned}$$

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = \text{(minimo) spazio non osservabile} = X_{NO}(n)$$

Criterio di osservabilità del rango

Stati indist. $x_0 + \mathrm{Ker}\,\overset{= X_{NO}}{\mathcal{O}}$

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

Criterio di osservabilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema} \qquad X_{NO} = X_{NO}(n) = \operatorname{Ker} \mathcal{O}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{cc} np & \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \\ & n \end{array}$$

Criterio di osservabilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$p = 1\text{: } \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\overset{n \times n}{\mathcal{O}}) \neq 0$$

$$p > 1\text{: } \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\underset{n \times n}{\mathcal{O}^\top \mathcal{O}}) \neq 0$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

note

Esempi

1. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$\Longrightarrow$ non osservabile

2. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$\Longrightarrow$ osservabile (in 2 passi)

note

In questa lezione

possibilità di determinare lo stato iniziale a partire da misure I/O

possibilità di determinare lo stato finale a partire da misure I/O

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
  - Insieme di stati indistinguibili da x_0

    $x_0 + \text{Ker}\, O_t$, $X_{NO}(t) = \text{Ker}\, O_t$
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
  - $X_{NO}(t+1) \subseteq X_{NO}(t) \quad \forall t$

    $\exists\ i \leq n$ t.c. $X_{NO}(i) = X_{NO}(j) = X_{NO} \quad \forall j \geq i$
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
  - Σ osservabile se $X_{NO} = \{0\}$
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

  Σ oss $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}\, O = n$

  O_n

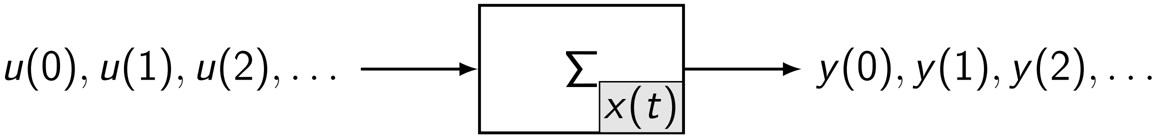
Ricostruibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t)$$

incognita

$$x(0) = x_0$$



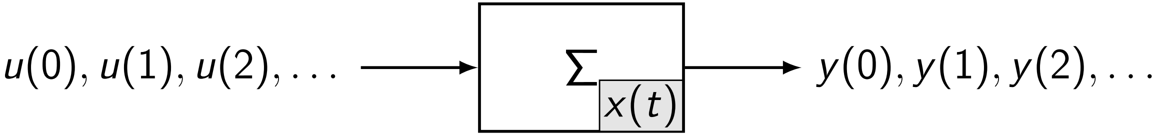
$$u(0), u(1), u(2), \ldots \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad x(t)} \longrightarrow y(0), y(1), y(2), \ldots$$

$$y(k) = \underbrace{HF^k x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{H\mathcal{R}_k u_k}_{\text{ev. forzata}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

Ricostruibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

$$x(0) = x_0$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Quando possiamo determinare univocamente $x^* = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$

Stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t) = x_0 + \ker \mathcal{O}_t$

Stati finali (al tempo $t-1$) compatibili con le misure:

$$F^{t-1}\left(x_0 + X_{NO}(t)\right) + R_{t-1}u_{t-1}$$

$$= \underbrace{F^{t-1}x_0 + R_{t-1}u_{t-1}}_{\text{stato finale "corretto"}} + \underbrace{F^{t-1}X_{NO}(t)}_{\text{parte indeterminata}}$$

= spazio non ricostruibile in t passi

Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$

$$= x^* + F^{t-1}X_{NO}(t)$$

Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$
  $= x^* + F^{t-1}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t)$ = spazio non ricostruibile in t passi $= F^{t-1}X_{NO}(t) = \{F^{t-1}x, x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$

X_{NR} = (minimo) spazio non ricostruibile $= X_{NR}(n+1) = F^n X_{NO}$

↳ in t

↳ $F^n X_{NO}(n+1) = F^n X_{NO}$

Criterio di ~~non~~ ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$. $(t \leq n+1)$

$$X_{NR} = X_{NR}(n+1) = F^n X_{NO} = F^n \ker \mathcal{O}, \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

Se $X_{NO} = \ker \mathcal{O} \subseteq \ker F^n \Longrightarrow X_{NR} = \{0\}$

Se $X_{NO} = \ker \mathcal{O} \nsubseteq \ker F^n \Longrightarrow X_{NR} \neq \{0\}$

Criterio di ~~non~~ ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

Criterio di ~~non~~ ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile } \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

$$\{0\} \subseteq \ker F^n$$

$$\Sigma \text{ osservabile } (X_{NO} = \{0\}) \Rightarrow \Sigma \text{ ricostruibile}$$

$$\Sigma \text{ ricostruibile } \not\Rightarrow \Sigma \text{ osservabile !!!}$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

note

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ non osservabile
ma ricostruibile se $\alpha_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ osservabile e (quindi) ricostruibile

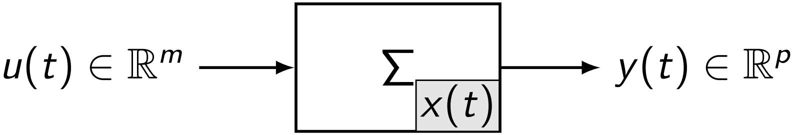
note

In questa lezione

- Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

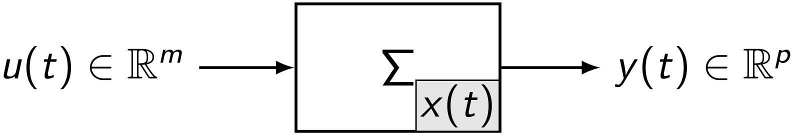
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = \overset{\text{"vera"}}{x_0} \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$$y(\tau) = \underbrace{He^{F\tau}x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)ds}_{\text{ev. forzata}},\ \tau \in [0, t]$$

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

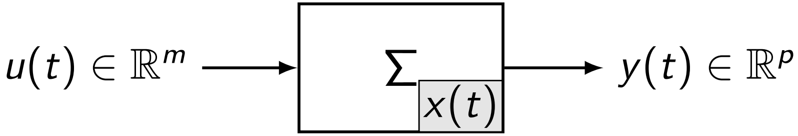


$$y(\tau) = He^{F\tau}x_0 + \int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)\mathrm{d}s,\ \tau \in [0, t]$$

Quando possiamo determinare univocamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned} \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad x(t)} \longrightarrow y(t) \in \mathbb{R}^p$$

osservabilità

$$y(\tau) = He^{F\tau}x_0 + \int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)ds, \; \tau \in [0, t]$$

Quando possiamo determinare univocamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Quando possiamo determinare univocamente $x^* = x(t) \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

ricostruibilità

Criterio di osservabilità del rango

↱ insieme di stati non osservabili in $[0,t]$

$\underline{X_{NO}(t)}$ = spazio non osservabile nell'intervallo $[0, t]$

X_{NO} = (minimo) spazio non osservabile

↳ in t

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

Criterio di osservabilità del rango

$X_{NO}(t) =$ spazio non osservabile nell'intervallo $[0, t]$

$X_{NO} =$ (minimo) spazio non osservabile $= \ker \mathcal{O}$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

Criterio di osservabilità del rango

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$$X_{NO} = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

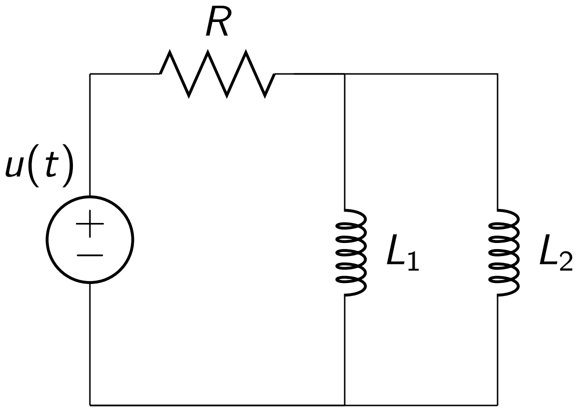
$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$!!

In generale $X_{NO}(t) = X_{NO} = \ker \mathcal{O} \quad \forall t > 0$

Esempio

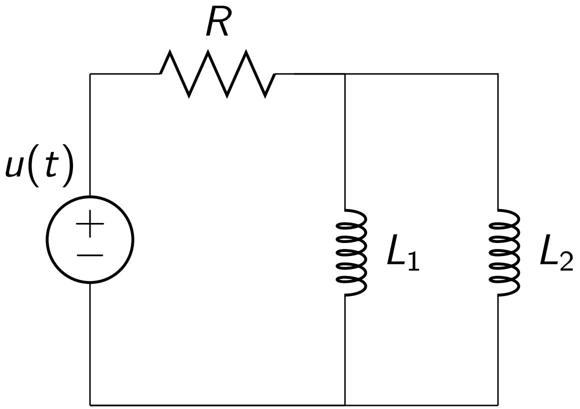


$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

note

Esempio



$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

note

Ricostruibilità (a t.c.) = osservabilità (a t.c.)

$$\overset{\text{corretto}}{x^*} = x(t) = e^{Ft}\overset{\text{corretta}}{x_0} + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) \mathrm{d}\tau$$

misure $u(\tau),\ y(\tau),\ \tau \in [0, t]$

1) Insieme di stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$

2) Insieme di stati finali (al tempo t) compatibili con le misure:

$$e^{Ft}(x_0 + X_{NO}(t)) + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$= e^{Ft} x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau + e^{Ft} X_{NO}(t)$$

$X_{NR}(t) = e^{Ft} X_{NO}(t) =$ spazio non ricostruibile in $[0, t]$

Def: Un sistema Σ a t.c. è ricostruibile se $\exists\, t > 0$ t.c. $X_{NR}(t) = \{0\}$.

Ricostruibilità (a t.c.) = osservabilità (a t.c.)

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\text{misure } u(\tau),\ y(\tau),\ \tau \in [0, t]$$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= x^* + \underbrace{e^{Ft}X_{NO}(t)}_{X_{NR}(t)}$$

Σ osservabile $\Longrightarrow X_{NO}(t) = \{0\} \Longrightarrow X_{NR}(t) = \{0\} \Longrightarrow \Sigma$ ricostruibile

Σ ricostruibile $\Longrightarrow X_{NR}(t) = \{0\} \Longrightarrow e^{Ft}X_{NO}(t) = \{0\} \Longrightarrow X_{NO}(t) = \{0\}$

$\Longrightarrow \Sigma$ osservabilità

e^{Ft} è invertibile

Ricostruibilità (a t.c.) $=$ osservabilità (a t.c.)

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\text{misure } u(\tau),\ y(\tau),\ \tau \in [0,t]$$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$
  $= x^* + e^{Ft}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t) =$ spazio non ricostruibile nell'intervallo $[0,t]$

e^{Ft} invertibile $\implies$ $\boxed{X_{NR}(t) = \{0\} \iff X_{NO}(t) = \{0\}}$

ricostruibilità $=$ osservabilità !!

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

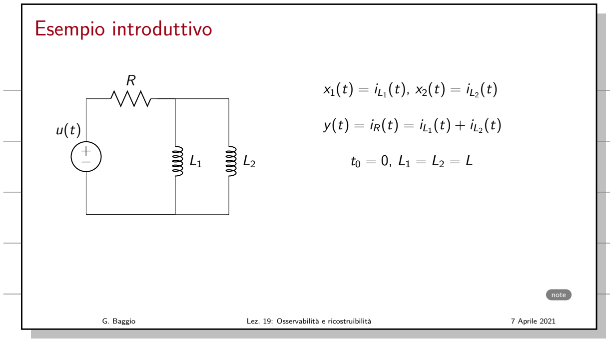
Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ `baggio@dei.unipd.it`

`baggiogi.github.io`



Esempio introduttivo

$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$t_0 = 0,\ L_1 = L_2 = L$

$x_1 = i_{L_1}\ ,\ x_2 = i_{L_2}$

$y = i_{L_1} + i_{L_2} = x_1 + x_2$

$t_0 = 0,\ L = L_1 = L_2$

Stati non osservabili del sistema?

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\dot x_1 = \frac{d i_{L_1}}{dt} = \frac{V_{L_1}}{L_1} = \frac{(u - V_R)}{L_1} = \frac{(u - R i_R)}{L_1} = \frac{1}{L_1}\left(u - R i_{L_1} - R i_{L_2}\right)$$

$$= \frac{1}{L_1}u - \frac{R}{L_1}x_1 - \frac{R}{L_1}x_2$$

$$\dot x_2 = \frac{d i_{L_2}}{dt} = \frac{V_{L_2}}{L_2} = \frac{1}{L_2}u - \frac{R}{L_2}x_1 - \frac{R}{L_2}x_2$$

$$\begin{cases} \dot x = \begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

$L_1 = L_2 = L$

$$y(t) = H e^{Ft} x_0 + \int_0^t H e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau \qquad x(0) = x_0$$

$$y_0(t) = \int_0^t H e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

Se x_0 è non osservabile in $[0,t]$: $y(\tau) = y_0(\tau)$ $\tau \in [0,t]$ $\forall u(\tau)$

$\Longrightarrow y(\tau) - y_0(\tau) = 0 \Longrightarrow H e^{F\tau} x_0 = 0 \quad \forall \tau \in [0,t]$

Calcolo e^{FT}

$$F = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = v u^T \qquad v = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

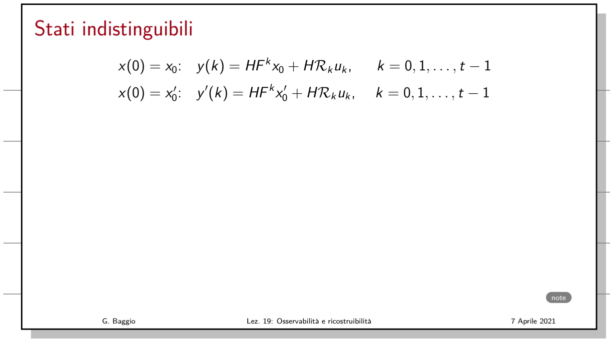
$$e^{F\tau} = \underline{I} + \frac{\left(e^{u^T v \tau} - 1\right)}{u^T v} F = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{e^{-\frac{2RT}{L}} - 1}{+2\cancel{R}/\cancel{L}}\left(+\frac{\cancel{R}}{\cancel{L}}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{e^{-\frac{2R\tau}{L}}}{2} + \frac{1}{2} & \frac{e^{-\frac{2R\tau}{L}}}{2} - \frac{1}{2}\\ \frac{e^{-\frac{2R\tau}{L}}}{2} - \frac{1}{2} & \frac{e^{-\frac{2RT}{L}}}{2} + \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\overset{[1\ 1]}{H} e^{F\tau} x_0 = \underbrace{\begin{bmatrix}e^{-\frac{2R\tau}{L}} & e^{-\frac{2R\tau}{L}}\end{bmatrix}}_{M} x_0 = 0 \ \ \forall \tau \in [0,t] \iff x_0 \in \operatorname{Ker} M = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right\}$$

$\iff$ stati non osservabili in $[0,t]$

$$x_0 = \begin{bmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



Stati indistinguibili

$x(0)=x_0$: $\quad y(k)=HF^kx_0+H\mathcal{R}_k u_k, \quad k=0,1,\dots,t-1$

$x(0)=x_0'$: $\quad y'(k)=HF^kx_0'+H\mathcal{R}_k u_k, \quad k=0,1,\dots,t-1$

Ingresso $u(0), u(1), \dots, u(t-1)$

$x(0)=x_0: \quad y(k)=HF^kx_0+HR_Ku_K, \; k=0,1,\dots,t-1$

$x(0)=x_0': \quad y'(k)=HF^kx_0'+HR_Ku_K, \; k=0,1,..,t-1$

Quando x_0' è indistinguibile da x_0?

$y(k)=y'(k) \quad \forall k=0,1,\dots,t-1$

$y'(k)-y(k)=0 \quad \forall k=0,1,\dots,t-1$

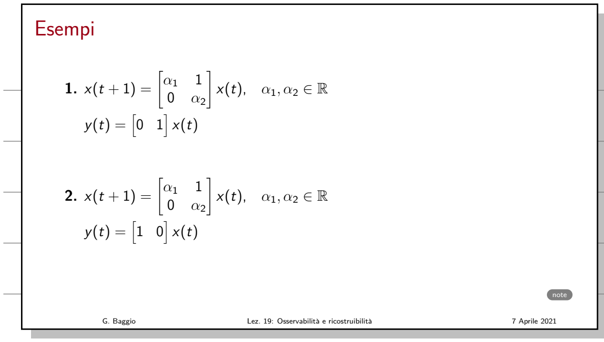
$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} k=0: \\ k=1: \\ k=2: \\ \vdots \\ k=t-1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} H(x_0'-x_0)=0 \\ HF(x_0'-x_0)=0 \\ HF^2(x_0'-x_0)=0 \\ \\ HF^{t-1}(x_0'-x_0)=0 \end{array} \right. \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{} (x_0'-x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{O}_t$ = matrice di osservabilità in t passi

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix} (x_0'-x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_0'-x_0 \in \ker \mathcal{O}_t$$

Insieme di stati indistinguibili da x_0: $\quad x_0+\ker \mathcal{O}_t = \{x_0+x, \; x\in\ker \mathcal{O}_t\}$



Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x(t)$

note

G. Baggio Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità 7 Aprile 2021

1) $F = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Σ è osservabile?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\, \mathcal{O} = 1 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ Σ non è osservabile

$$X_{NO} = \text{Ker}\, \mathcal{O} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

2) $F = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

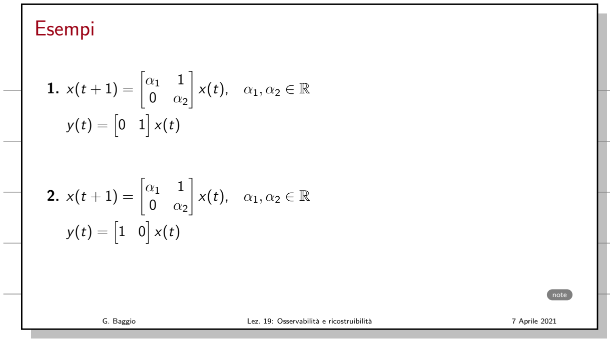
Σ osservabile?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\, \mathcal{O} = 2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ Σ osservabile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (in 2 passi)

$$X_{NO}(1) = \text{Ker}\, \mathcal{O}_1 = \text{Ker}\, H = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_{NO}(2) = \{0\}$$



Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

   $y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x(t)$

note

1) $F = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\Sigma = (F, H)$ non è osservabile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$X_{NO} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$

Σ ricostruibile?

$\ker \mathcal{O} = X_{NO} \subseteq \ker F^2$

$$F^2 = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1^2 & \alpha_1+\alpha_2\\ 0 & \alpha_2^2\end{bmatrix}$$

$$\ker F^2 = \begin{cases} \{0\} & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0 \\ \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-\alpha_1\end{bmatrix}\right\} & \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 \neq 0 \\ \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0 \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$X_{NO} \not\subseteq \ker F^2$

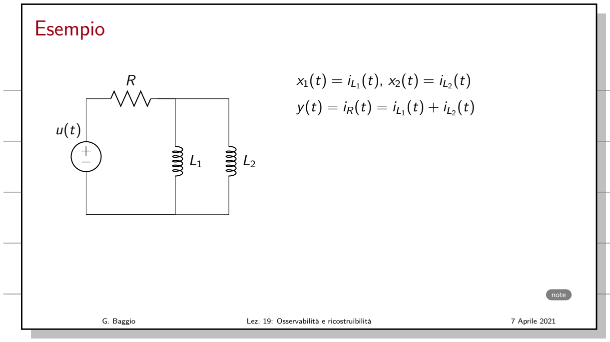
Σ non ricostruibile

$X_{NO} \subseteq \ker F^2$

Σ ricostruibile

2) $F = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Σ osservabile $\Longrightarrow X_{NO} = \{0\} \Longrightarrow \ker F^2 \supseteq \{0\} \Longrightarrow \Sigma$ ricostruibile



Esempio

$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

G. Baggio Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità 7 Aprile 2021

$x_1 = i_{L_1}$, $x_2 = i_{L_2}$

$y = i_{L_1} + i_{L_2} = x_1 + x_2$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Σ osservabile?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) & -R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} \mathcal{O} = 1 < n = 2$

$\Longrightarrow$ Σ non osservabile

$$X_{NO} = \ker \mathcal{O} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$