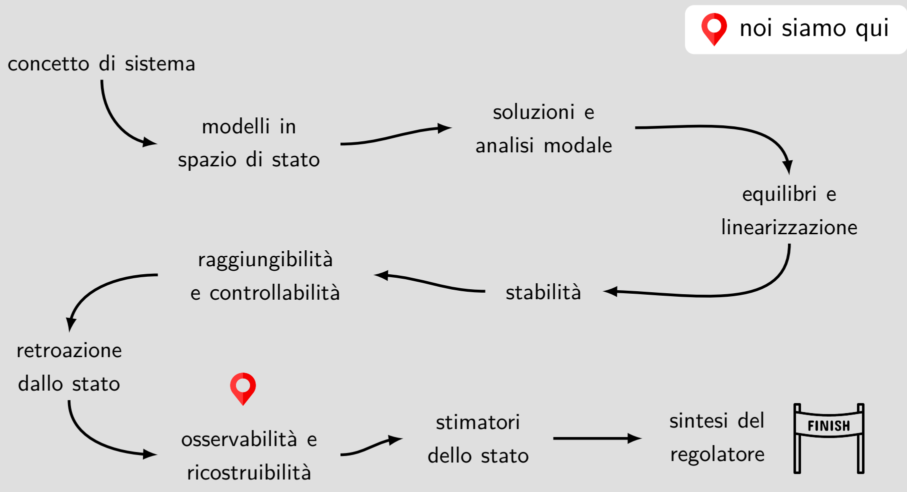
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

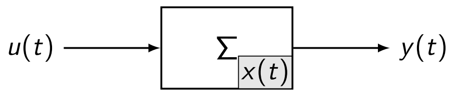


In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

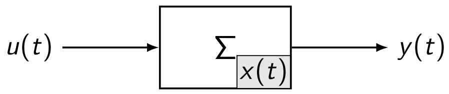


Osservabilità = possibilità di determinare lo **stato iniziale** $x_0 = x(t_0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Ricostruibilità = possibilità di determinare lo **stato finale** $x^* = x(t^*)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

Stati indistinguibili e non osservabili

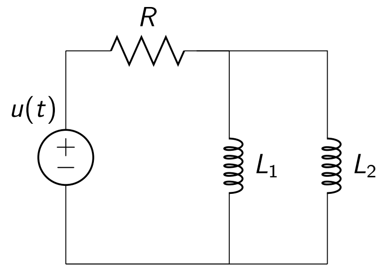
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato x_0' si dice indistinguibile dallo stato x_0'' in $[t_0, t^*]$ se, per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(t_0) = x_0''$ coincidono su $[t_0, t^*]$.

Definizione: Uno stato x_0 si dice non osservabile nell'intervallo $[t_0, t^*]$ se è indistinguibile dallo stato $x(t_0) = 0$.

Esempio introduttivo



$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$

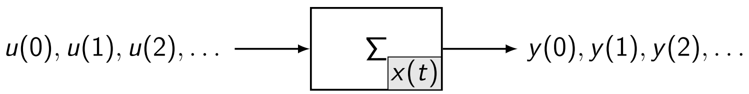
$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$t_0 = 0,\ L_1 = L_2 = L$

$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è non osservabile in $[0, t]$, $\forall t > 0$

Osservabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

Insieme di stati iniziali indistinguibili da x_0 in $[0, t-1]$ (= in t passi)?

Quando possiamo determinare univocamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Stati indistinguibili

$$x(0) = x_0\colon \quad y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$$
$$x(0) = x_0'\colon \quad y'(k) = HF^k x_0' + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$y'(k) - y(k) = 0,\ \forall k \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq\, \mathcal{O}_t \,=\, \text{matrice di osservabilità in } t \text{ passi}} (x_0' - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_0' - x_0 \in \ker \mathcal{O}_t$$

$x_0 + \ker \mathcal{O}_t = \{x_0 + x, x \in \ker \mathcal{O}_t\}$ = insieme di stati indistinguibili in t passi da x_0

Spazio non osservabile

$$
\begin{aligned}
X_{NO}(t) &= \text{insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } x_0 = 0 \\
&= \text{insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\
&= \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)
\end{aligned}
$$

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

Criterio di osservabilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$p = 1: \ \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

$$p > 1: \ \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}^\top \mathcal{O}) \neq 0$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

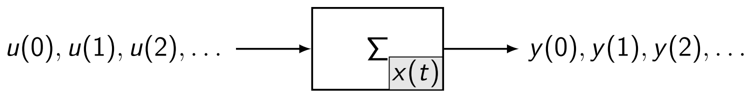
$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$ $\quad\Longrightarrow$ non osservabile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ $\quad\Longrightarrow$ osservabile (in 2 passi)

Ricostruibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\
y(t) &= Hx(t)
\end{aligned}
\qquad x(0) = x_0
$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$\boxed{\text{Quando possiamo determinare univocamente } x^* = x(t-1) \in \mathbb{R}^n \text{ dalle misure?}}$$

Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$
  $= x^* + F^{t-1}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) =$ spazio non ricostruibile in t passi $= F^{t-1}X_{NO}(t) = \{F^{t-1}x, x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$

$X_{NR} =$ (minimo) spazio non ricostruibile $= X_{NR}(n+1) = F^n X_{NO}$

Criterio di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

$$\Sigma \text{ osservabile } (X_{NO} = \{0\}) \Rightarrow \Sigma \text{ ricostruibile}$$

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ osservabile !!!}$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ non osservabile ma ricostruibile se $\alpha_1 = 0$

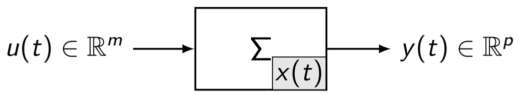
2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ osservabile e (quindi) ricostruibile

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$$y(\tau) = He^{F\tau}x_0 + \int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)ds, \ \tau \in [0, t]$$

$\boxed{\text{Quando possiamo determinare univocamente } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ dalle misure?}}$

$\boxed{\text{Quando possiamo determinare univocamente } x^* = x(t) \in \mathbb{R}^n \text{ dalle misure?}}$

Criterio di osservabilità del rango

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$$X_{NO} = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

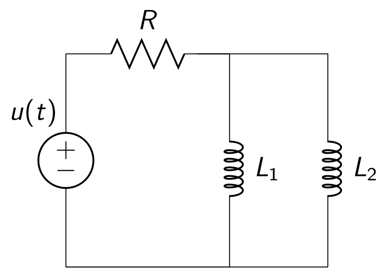
Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$!!

Esempio



$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma$ non osservabile

Ricostruibilità (a t.c.) = osservabilità (a t.c.)

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

misure $u(\tau)$, $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$
  $= x^* + e^{Ft}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t)$ = spazio non ricostruibile nell'intervallo $[0, t]$

e^{Ft} invertibile $\implies$ $\boxed{X_{NR}(t) = \{0\} \iff X_{NO}(t) = \{0\}}$

ricostruibilità = osservabilità !!