

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

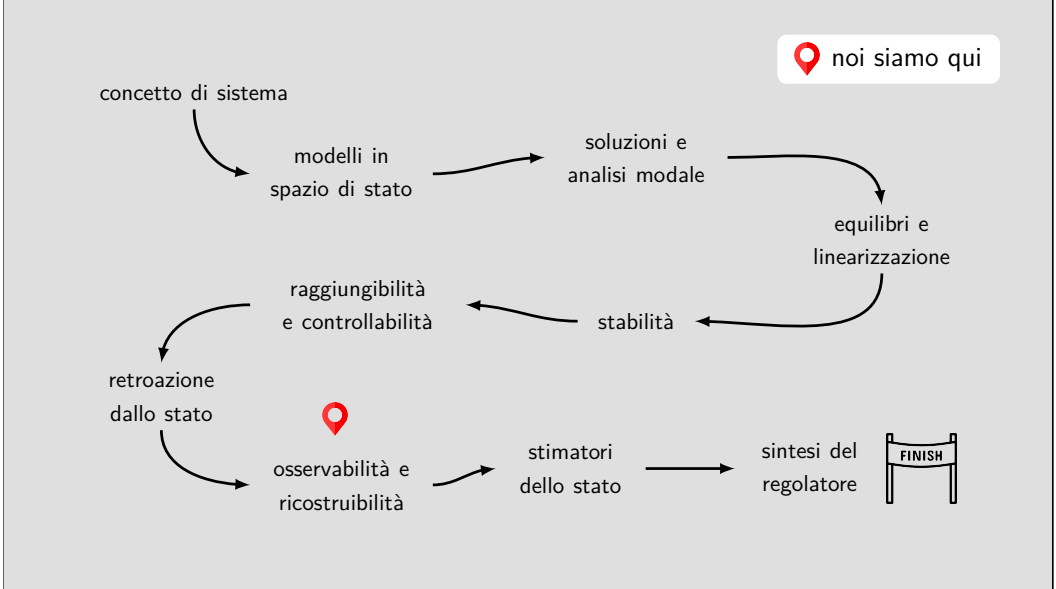
---

---

---

---

---

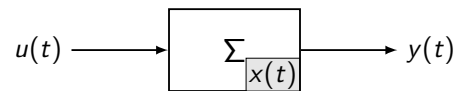


## In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

## Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$

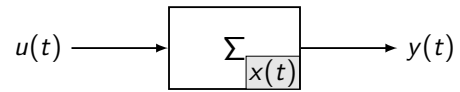


**Osservabilità** = possibilità di determinare lo **stato iniziale**  $x_0 = x(t_0)$  del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo  $[t_0, t^*]$

**Ricostruibilità** = possibilità di determinare lo **stato finale**  $x^* = x(t^*)$  del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo  $[t_0, t^*]$

## Stati indistinguibili e non osservabili

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$



**Definizione:** Uno stato  $x'_0$  si dice indistinguibile dallo stato  $x''_0$  in  $[t_0, t^*]$  se, per ogni ingresso  $u(\cdot)$ , l'uscita  $y'(\cdot)$  corrispondente allo stato iniziale  $x(t_0) = x'_0$  e l'uscita  $y''(\cdot)$  corrispondente allo stato iniziale  $x(t_0) = x''_0$  coincidono su  $[t_0, t^*]$ .

**Definizione:** Uno stato  $x_0$  si dice non osservabile nell'intervallo  $[t_0, t^*]$  se è indistinguibile dallo stato  $x(t_0) = 0$ .

---

---

---

---

---

---

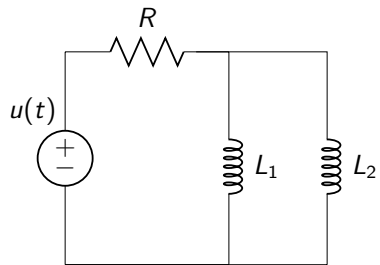
---

---

---

---

## Esempio introduttivo



$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$t_0 = 0, \quad L_1 = L_2 = L$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{è non osservabile in } [0, t], \quad \forall t > 0$$

---

---

---

---

---

---

---

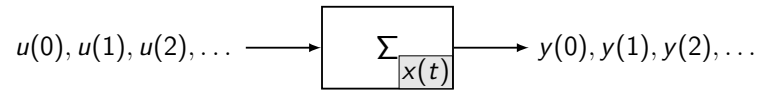
---

---

---

## Osservabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(k) = HF^k x_0 + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati iniziali indistinguibili da  $x_0$  in  $[0, t-1]$  (= in  $t$  passi)?

Quando possiamo determinare univocamente  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  dalle misure?

## Stati indistinguibili

$$x(0) = x_0: \quad y(k) = HF^k x_0 + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = x'_0: \quad y'(k) = HF^k x'_0 + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y'(k) - y(k) = 0, \quad \forall k \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathcal{O}_t} (x'_0 - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff x'_0 - x_0 \in \ker \mathcal{O}_t$$

$\triangleq \mathcal{O}_t =$  matrice di osservabilità in  $t$  passi

$x_0 + \ker \mathcal{O}_t = \{x_0 + x, x \in \ker \mathcal{O}_t\}$  = insieme di stati indistinguibili in  $t$  passi da  $x_0$

## Spazio non osservabile

$X_{NO}(t)$  = insieme di stati indistinguibili in  $t$  passi da  $x_0 = 0$   
= insieme di stati non osservabili in  $t$  passi  
= spazio non osservabile in  $t$  passi =  $\ker(\mathcal{O}_t)$

**Teorema:** Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = (\text{minimo}) \text{ spazio non osservabile}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Criterio di osservabilità del rango

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) osservabile se  $X_{NO} = \{0\}$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) osservabile in  $t$  passi se  $t$  è il più piccolo intero tale che  $X_{NO}(t) = \{0\}$ .

$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n$  = matrice di osservabilità del sistema

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

$$p = 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

$$p > 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}^T \mathcal{O}) \neq 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Esempi

1.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$   $\implies$  non osservabile  
 $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

2.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$   $\implies$  osservabile (in 2 passi)  
 $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

---

---

---

---

---

---

---

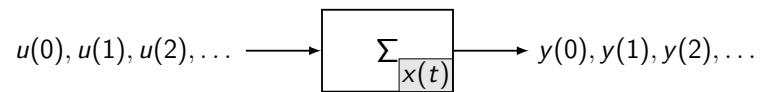
---

---

---

## Ricostruibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$



$$y(k) = HF^k x_0 + HR_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Quando possiamo determinare univocamente  $x^* = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$  dalle misure?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Spazio non ricostruibile

$$x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

- stati iniziali compatibili con le misure:  $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure:  $F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$   
 $= x^* + F^{t-1}X_{NO}(t)$

$$X_{NR}(t) = \text{spazio non ricostruibile in } t \text{ passi} = F^{t-1}X_{NO}(t) = \{F^{t-1}x, x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$$

$$X_{NR} = (\text{minimo}) \text{ spazio non ricostruibile} = X_{NR}(n+1) = F^n X_{NO}$$

## Criterio di non ricostruibilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se  $X_{NR} = \{0\}$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in  $t$  passi se  $t$  è il più piccolo intero tale che  $X_{NR}(t) = \{0\}$ .

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}$$

$$\Sigma \text{ osservabile } (X_{NO} = \{0\}) \Rightarrow \Sigma \text{ ricostruibile}$$

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ osservabile !!!}$$





## Criterio di osservabilità del rango

$X_{NO}(t)$  = spazio non osservabile nell'intervallo  $[0, t]$

$X_{NO}$  = (minimo) spazio non osservabile

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.c. si dice (completamente) osservabile se  $X_{NO} = \{0\}$ .

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

**N.B.** Se un sistema  $\Sigma$  a t.c. è osservabile allora  $X_{NO}(t) = \{0\}$  per ogni  $t > 0$  !!

---

---

---

---

---

---

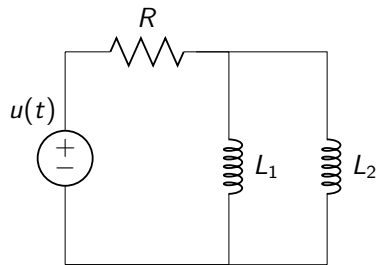
---

---

---

---

## Esempio



$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

