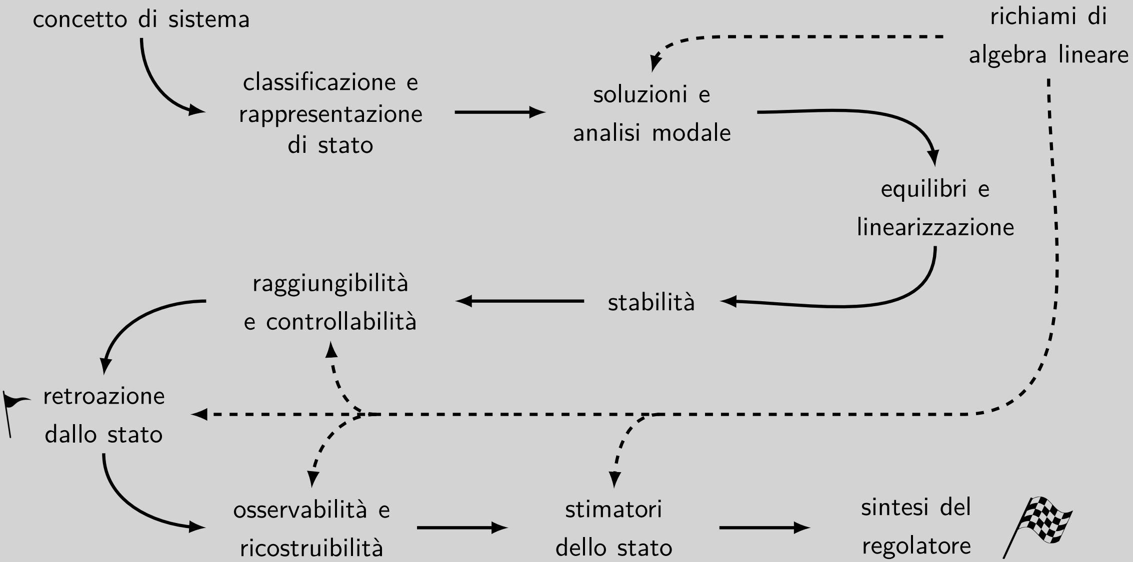
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

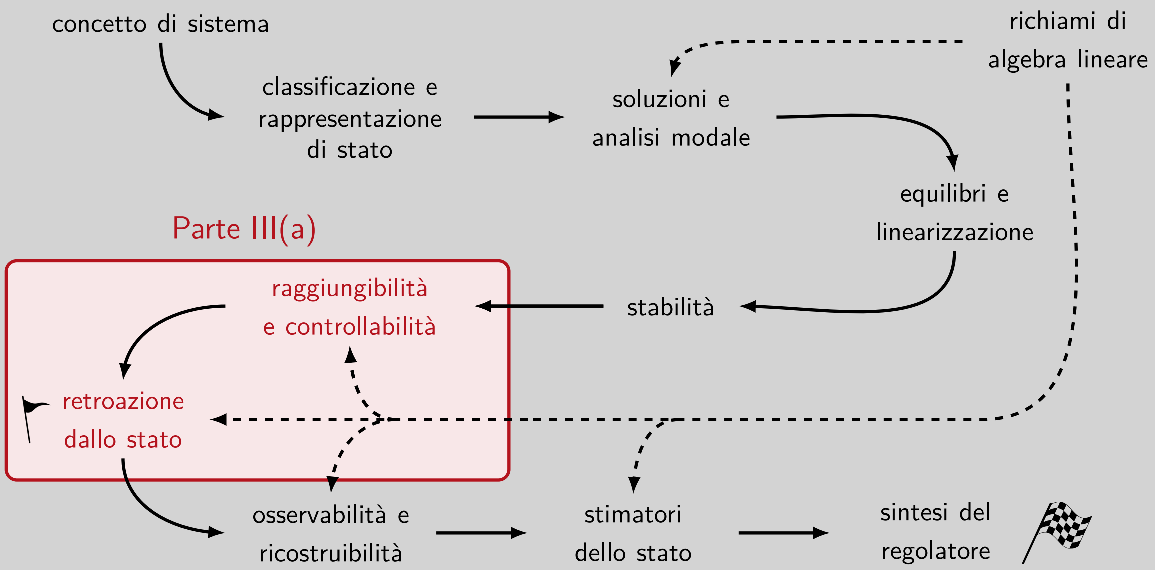
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
Parte III(a)
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- Esercizio 2: forma canonica di controllo e controllo a minima energia
- Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma canonica di controllo e controllo a minima energia
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio 1: soluzione

1. Sistema raggiungibile solo se $\alpha \neq 0$. Sistema controllabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\quad X_R(t) = \begin{cases} \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0, \end{cases} \quad t \geq 2,$

$$X_C(1) = \begin{cases} \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0, \end{cases} \qquad X_C(t) = \mathbb{R}^3, \quad t \geq 2.$$

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma canonica di controllo e controllo a minima energia
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 3 Settembre 2013]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

1. Forma canonica di controllo e relativo cambio di base?

2. Controllo a min. energia che porta $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ a $x(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$?

Esercizio 2: soluzione

1. $F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

2. $u(0) = -6$, $u(1) = 0$, $u(2) = 3$.

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma canonica di controllo e controllo a minima energia
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Dead-Beat Controller (DBC) per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Per $\alpha = 1$ DBC che porta a zero lo stato nel numero minimo di passi?

Esercizio 3: soluzione

1. Se $\alpha = -1$ DBC non esiste.

   Se $\alpha \neq -1$, $K = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha+1} & -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) + 2): Raggiungibilità:

$$X_R(1) = \operatorname{Im} G = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_R(2) = \operatorname{Im} [G \;\; FG] = \operatorname{Im} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array} \right]$$

back

$$= \begin{cases} \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} & \alpha = 0 \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$X_R(K) = \begin{cases} \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} & \alpha = 0 \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$K \geq 3$

(perché se $X_R(i) = X_R(i+1)$ allora $X_R(j) = X_R(i) \ \forall j \geq i$)

Quindi: Σ raggiungibile (in 2 passi) per $\alpha \neq 0$

Σ non raggiungibile per $\alpha = 0$

back

Controllabilità

$$X_C(1) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Fx \in \operatorname{Im} G \} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \ \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ \alpha x_2 + \alpha x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \ \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{N.B. } X_R(1) \neq X_C(1)!)$$

$X_C(2) = \mathbb{R}^3$ se $\alpha \neq 0$ (ragg. $\Rightarrow$ controllabilità)

Se $\alpha = 0$:

$$X_c(2) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : F^2 x \in [G \ \ FG] \} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^3$$

Quindi: Σ controllabile (in 2 passi) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 3 Settembre 2013]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

1. Forma canonica di controllo e relativo cambio di base?
2. Controllo a min. energia che porta $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ a $x(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$?

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

1) F_c, T_c?

- Esistenza? Σ deve essere raggiungibile!

$$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \qquad \det R = -1 \neq 0 \Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$\Downarrow$

Σ può essere portato in forma can. di controllo

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare T_c:

$$T_c = R\,R_c^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} G_c & F_c G_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

back

2) $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad x(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

L'ingresso richiesto esiste perché Σ è raggiungibile e ha la forma

$$u_3 = R_3^T (R_3 R_3^T)^{-1} (x(3) - F^3 x(0)) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = [G \;\; FG \;\; F^2G]$$

(dopo un po' di conti...)

Quindi: $u(0) = -6$, $u(1) = 0$, $u(2) = 3$.

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Dead-Beat Controller (DBC) per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Per $\alpha = 1$ DBC che porta a zero lo stato nel numero minimo di passi?

back

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$$

$$F = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Esiste un DBC?

Autovalori di F: $\lambda_1 = 0 \quad \nu_1 = 2 \qquad \lambda_2 = \alpha \quad \nu_2 = 1$

Test PBH

$[zI - F \quad G] \quad \forall z = \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$\lambda_2 = \alpha \neq 0$

$$\underbrace{\left[\lambda_2 I - F \quad G\right]}_{PBH} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha = -1$ rank $PBH = 2$

Σ non ammette un DBC

$\alpha \neq -1$

rank $PBH = 3$

Σ ammette un DBC

$$\boxed{\alpha \neq -1}$$

$K = [k_1 \quad K_2 \quad k_3]$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \left[\begin{array}{cc|c} \lambda - k_1 & -k_2 & -1-k_3 \\ -1-k_1 & \lambda-\alpha-k_2 & -k_3 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

$$= \lambda\Big((\lambda - k_1)(\lambda-\alpha-k_2) - k_2(1+k_1)\Big)$$

$$= \lambda\Big(\lambda^2 - \lambda(k_1+k_2+\alpha) + k_1(\alpha+k_2) - k_2(1+k_1)\Big)$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(k_1+k_2+\alpha) + (\alpha k_1 + \cancel{k_1 k_2} - k_2 - \cancel{k_1 k_2})\lambda$$

$$\overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \alpha = 0 \\ \alpha k_1 - k_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1+\alpha)k_1 = -\alpha \implies k_1 = \dfrac{-\alpha}{1+\alpha} \\ k_2 = \alpha k_1 \implies k_2 = -\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha} \end{cases}$$

back

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{1+\alpha} & -\frac{\alpha^2}{1+\alpha} & k_3 \end{bmatrix} \qquad k_3 \in \mathbb{R}$$

2) $\boxed{\alpha = 1}$

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & k_3 \\ -1/2 & -1/2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1+k_3 \\ 1/2 & 1/2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad k_3 \in \mathbb{R}$$

$\tilde{F} = F + gK$

$\tilde{F}_J$?

Possibili forme di Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \quad \tilde{F}_J^{K} = 0 \quad K \geq 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \quad \tilde{F}_J^{K} = 0 \quad K \geq 2$$

$\downarrow$

$\exists K_3$ t.c. $\tilde{F}_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$??

molt. geom. relativa a $\lambda = 0$

$\downarrow$

$$g_0 = \dim \ker \left[\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\lambda} I - \tilde{F} \right] = \dim \ker (\tilde{F}) = n - \operatorname{rank}(\tilde{F})$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1+k_3 \\ 1/2 & 1/2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{F}$ ha una sola colonna lin indip

$\Updownarrow$

$1 + k_3 = -k_3 \Rightarrow k_3 = -1/2$

$g_0 = 2 \Rightarrow$ DBC $K = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ porta a zero lo stato in 2 passi (= numero minimo)