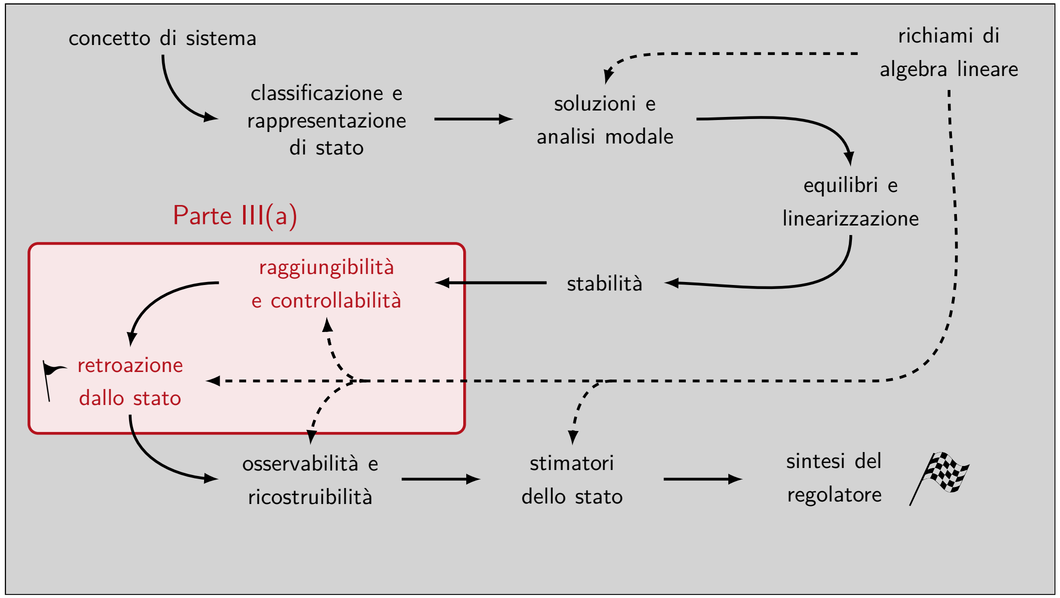
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma canonica di controllo e controllo a minima energia
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio 1: soluzione

1. Sistema raggiungibile solo se $\alpha \neq 0$. Sistema controllabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $X_R(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad X_R(t) = \begin{cases}\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0,\end{cases} \quad t \geq 2,$

$$X_C(1) = \begin{cases}\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0,\end{cases} \qquad X_C(t) = \mathbb{R}^3, \quad t \geq 2.$$

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 3 Settembre 2013]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix}-3 & 1\\-2 & 0\end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

1. Forma canonica di controllo e relativo cambio di base?

2. Controllo a min. energia che porta $x(0) = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ a $x(3) = \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$?

Esercizio 2: soluzione

1. $F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

2. $u(0) = -6$, $u(1) = 0$, $u(2) = 3$.

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Dead-Beat Controller (DBC) per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Per $\alpha = 1$ DBC che porta a zero lo stato nel numero minimo di passi?

Esercizio 3: soluzione

1. Se $\alpha = -1$ DBC non esiste.

   Se $\alpha \neq -1$, $K = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha+1} & -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.