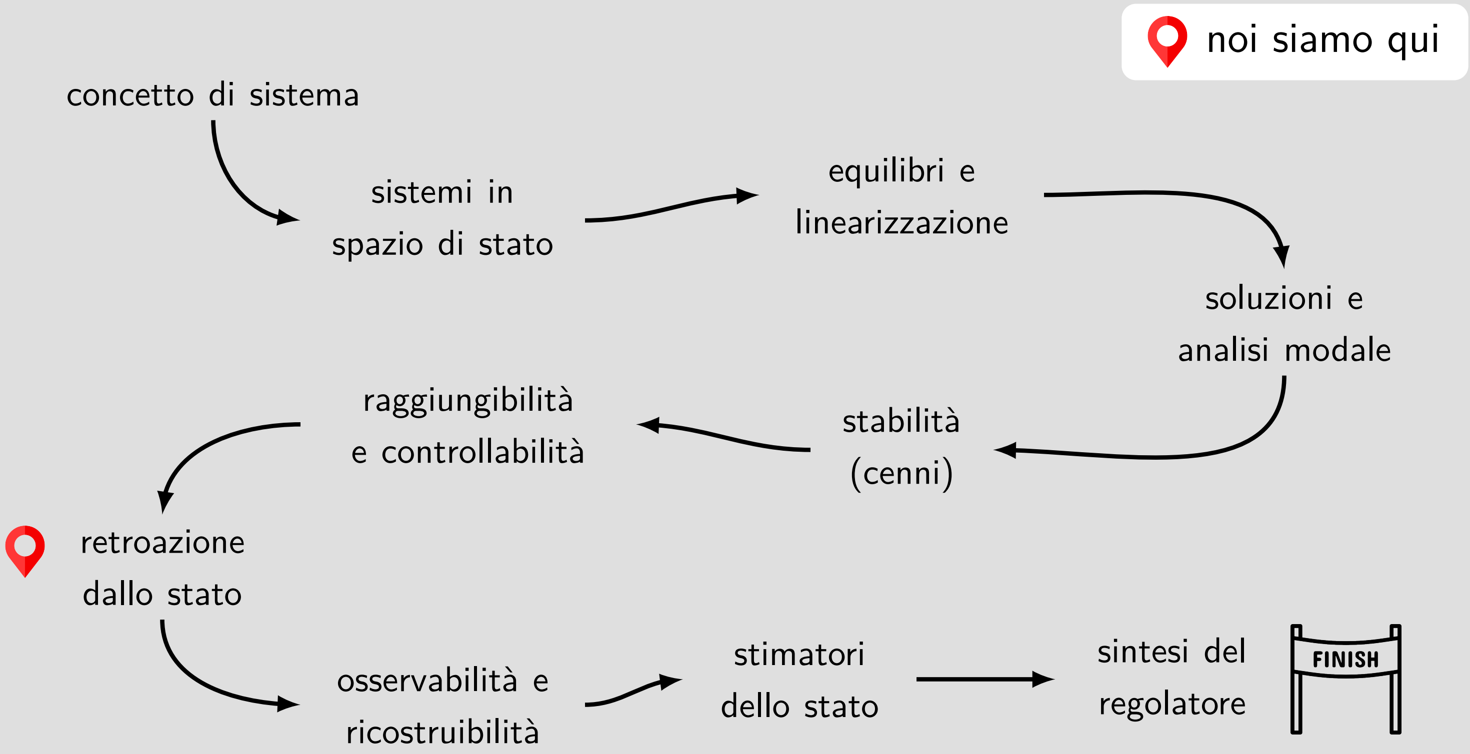
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Controllo in retroazione dallo stato (parte 1)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Problemi di controllo in catena aperta e in retroazione
- Retroazione statica di sistemi lineari

In questa lezione

- ▷ Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- ▷ Comandi Matlab®

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T?

$$z(t) = T^{-1}x(t) \longrightarrow x(t) = Tz(t)$$

$$Tz(t+1) = (F + GK)Tz(t) + Gv(t)$$

$$z(t+1) = (\underbrace{T^{-1}FT}_{\bar{F}} + \underbrace{T^{-1}G}_{\bar{G}}\underbrace{KT}_{\bar{K}})z(t) + \underbrace{T^{-1}G}_{\bar{G}}v(t)$$

$$\Sigma^{(K)} = (F, G, K) \xrightarrow{z = T^{-1}x} \bar{\Sigma}^{(K)} = (T^{-1}FT, T^{-1}G, KT)$$

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$$\boxed{\text{Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base } T\text{?}}$$

$$F' = T^{-1}FT, \quad G' = T^{-1}G, \quad K' = KT$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

note

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

note

In questa lezione

- ▷ Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- ▷ Comandi Matlab®

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

Quando è possibile assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati?

note

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$$\boxed{\text{Quando è possibile assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$$

Teorema: Per ogni polinomio monico, di grado n

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \ \ p_i \in \mathbb{R},$$

esiste una matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tale che $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ se e solo se il sistema Σ è raggiungibile.

note

Allocazione degli autovalori ($m = 1$): metodo diretto

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \ \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati?

Allocazione degli autovalori ($m = 1$): metodo diretto

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \ \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F + gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \longrightarrow p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = \text{polinomio con autovalori desiderati}$$

$$\boxed{\text{Risolvere } \Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda) \text{ con incognita } K}$$

$$\Downarrow$$

Sistema di equazioni lineari con incognite $k_1, \dots, k_n$, $K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

note

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

note

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora possiamo cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di F_{11} (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora possiamo cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di F_{11} (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).

per sistemi a tempo discreto!

3. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) tutti i modi del sistema retroazionato convergono a zero in tempo finito. Il controllore in questo caso viene detto controllore dead-beat!

$$\boxed{\exists \text{ controllore dead-beat} \iff \Sigma = (F, G) \text{ è controllabile}}$$

gli autovalori "non ragg" sono in zero

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora possiamo cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di F_{11} (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).

3. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) tutti i modi del sistema retroazionato convergono a zero in tempo finito. Il controllore in questo caso viene detto controllore dead-beat!

4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo, ma in questo caso non si possono avere controllori dead-beat.

In questa lezione

- ▷ Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- ▷ Comandi Matlab®

Comandi Matlab® – Control System Toolbox

`K = place(F,G,v)`

calcola matrice di retroazione K tale che $F + GK$ ha come autovalori gli elementi del vettore v (**N.B.** numericamente robusto ma non funziona per autovalori multipli);

`K = acker(F,G,v)`

calcola matrice di retroazione K tale che $F + GK$ ha come autovalori gli elementi del vettore v (**N.B.** numericamente instabile ma funziona anche per autovalori multipli);

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Controllo in retroazione dallo stato (parte 1)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$\Sigma_K^{(K)} : z(t+1) = (F_K + G_K K_K)x(t) + G_K v(t)$$

$$F_K = \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{F_{11}}}^{k} & \overbrace{\phantom{F_{12}}}^{n-k} \end{array} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \qquad K_K = KT = \begin{bmatrix} \underbrace{K_1}_{k} & \underbrace{K_2}_{n-k} \end{bmatrix}$$

$$F_K + G_K K_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 K_1 & G_1 K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + G_1 K_1 & F_{12} + G_1 K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ La retroazione non influenza il sottosistema non raggiungibile

$\longrightarrow$ Non possiamo modificare gli autovalori "non raggiungibili" del sistema

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \ x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \ x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Quando è possibile assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$

Teorema: Per ogni polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \quad p_i \in \mathbb{R},$$

esiste una matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tale che $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ se e solo se il sistema Σ è raggiungibile.

note

" Σ non raggiungibile $\Longrightarrow \nexists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ $\forall$ scelta $p(\lambda)$ "

Forma di Kalman

" Σ raggiungibile $\Longrightarrow \exists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ $\forall$ scelta $p(\lambda)$ " $(*)$

<u>Lemma</u> (forma canonica di controllo)

$\Sigma = (F, g)$ è raggiungibile se e solo se $\exists T_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile t.c.

$$F_c = T_c^{-1} F T = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{matrice compagna}} \qquad g_c = T_c^{-1} g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F_c}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$(*)$ Sia $K_c = K T_c = [K_{c,1} \cdots K_{c,n}] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ la matrice di retroazione nella base T_c. La matrice di stato del sistema retroazionato nella base T_c:

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_{c,1} \ K_{c,2} \cdots K_{c,n}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 + K_{c,1} & -\alpha_1 + K_{c,2} & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} + K_{c,n} \end{bmatrix}$$

Quindi $F_c + g_c K_c$ è ancora in forma compagna e quindi

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - K_{c,n})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - K_{c,2})\lambda + (\alpha_0 - K_{c,1})$$

Dato un qualsiasi polinomio $p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0$ con $p_i \in \mathbb{R}$ scelti arbitrariamente, possiamo eguagliare i coeff. di $\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda)$ e $p(\lambda)$:

$$\begin{cases} \alpha_{n-1} - K_{c,n} = p_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - K_{c,2} = p_1 \\ \alpha_0 - K_{c,1} = p_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} K_{c,n} = \alpha_{n-1} - p_{n-1} \\ \vdots \\ K_{c,2} = \alpha_1 - p_1 \\ K_{c,1} = \alpha_0 - p_0 \end{cases}$$

Quindi $\exists\, K = K_c T_c^{-1}$ tale che $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ per ogni scelta di $p(\lambda)$.

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$p(\lambda) = \lambda^3 \longrightarrow$ polinomio desiderato

1) Esistenza di K^*?

Verifichiamo se il sistema è raggiungibile

$$R = [g \;\; Fg \;\; F^2 g] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det R = 1 - 3 = -2 \neq 0 \longrightarrow \Sigma = (F, G)$ raggiungibile

$\longrightarrow \exists \, K^*$

2) $\Delta_{F+gK}(\lambda) \overset{!}{=} p(\lambda) \qquad K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -2 - k_2 & -k_3 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -k_1 & -1 - k_2 & \lambda - k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 1 - k_1)(\lambda - k_3) - k_1(2 + k_2)$$
$$- \lambda k_1 k_3 - (\lambda - 1 - k_1)(1 + k_2)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + (-1 - k_1 - k_3)\lambda + k_3(1 + k_1)\right) - 2k_1 - k_1 k_2$$
$$- \lambda k_1 k_3 - \lambda(1 + k_2) + (1 + k_1)(1 + k_2)$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-1-k_1-k_3) + \lambda(k_3 + \cancel{k_1 k_3} +$$

$$-\cancel{k_1 k_3} - 1 - k_2) + (-2k_1 - \cancel{k_1 k_2} + 1 + k_1 + k_2 + \cancel{k_1 k_2})$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-1-k_1-k_3) + \lambda(k_3 - 1 - k_2) + (1 - k_1 + k_2)$$

$$p(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} -1-k_1-k_3 = 0 \\ k_3 - 1 - k_2 = 0 \\ 1 - k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{''} \\ k_3 - \cancel{1} + \cancel{1} - k_1 = 0 \longrightarrow k_3 = k_1 \\ k_2 = k_1 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 - 2k_1 = 0 \longrightarrow k_1 = -1/2 \\ k_3 = -1/2 \\ k_2 = -3/2 \end{cases}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$