Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1)+2) : Calcoliamo gli spazi ragg. e contr. e poi verifichiamo ragg. e contr. completa

N.B.: i) Per il primo i t.c. $X_R(i) = X_R(i+1) \implies X_R(j) = X_R(i)\ \forall j \geq i$

ii) Se $X_R(t) = \mathbb{R}^n \implies X_C(t) = \mathbb{R}^n$

Calcolo spazi ragg. e raggiungibilità:

$$X_R(1) = \operatorname{im} R_1 = \operatorname{im} G = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_R(2) = \operatorname{im} R_2 = \operatorname{im} [G \ \ FG] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{cases} \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha = 0 \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Quindi:

- $\alpha = 0$: per i) $X_R(1) = X_R(2) \implies X_R(t) = X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}\ \forall t \geq 1$

  $\implies \Sigma$ non ragg.

- $\alpha \neq 0$: $X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

  $X_R(t) = \mathbb{R}^3 \quad t \geq 2 \implies \Sigma$ ragg. (in 2 passi)

Calcolo spazi controllabili e controllabilità: $\quad \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$X_c(1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Fx \in X_R(1) = \mathrm{im}\, R_1 = \mathrm{im}\, G\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ 0\end{bmatrix},\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\quad " \quad : \begin{bmatrix}x_1\\ -x_1 + x_2 + x_3\\ \alpha(x_2 + x_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ 0\end{bmatrix},\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \begin{cases} \left\{\begin{bmatrix}\beta\\ \delta\\ \gamma + \beta - \delta\end{bmatrix},\ \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^3 & \alpha = 0 \\[2ex] \left\{\begin{bmatrix}\beta\\ \delta\\ -\delta\end{bmatrix},\ \beta, \delta \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Quindi:

- $\alpha = 0$: $X_c(t) = \mathbb{R}^3 \quad \forall t \geq 1 \implies \Sigma$ controllabile (in 1 passo)
- $\alpha \neq 0$: $X_c(1) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} \quad [\neq X_R(1)]$

per ii) $X_c(t) = \mathbb{R}^3 \quad \forall t \geq 2 \implies \Sigma$ controllabile (in 2 passi)

Esercizio 2

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Kalman di raggiungibilità?
2. Ingresso che porta nel minor numero possibile di passi lo stato da

$$\text{da} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

note

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Forma di Kalman:

$$X_R = \operatorname{im} R = \operatorname{im} [\, G \ \ FG \ \ F^2G \,] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \Big\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \Big\}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & \tilde{v}_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad T^{-1} = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (T \text{ matrice di permutazione})$$

$$F_K = T^{-1}FT = TFT = T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G_K = T^{-1}G = TG = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

2) Calcolare $u(t)$ t.c. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad x(\bar{t}) = x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $\bar{t}$ più piccolo possibile

- Esistenza di $u(t)$:

$x^* \in X_R$? $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \Big\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big\}$ sì

- Calcolo di u:

$$t=1: \quad \underset{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}{\overset{\shortparallel}{x^*}} \in X_R(1) = \operatorname{im} G = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \, ? \quad \text{No}$$

$$t=2: \quad x^* \in X_R(2) = \operatorname{im}[G \;\; FG] = X_R = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \, ? \quad \text{Sì}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$x^* = x(2) = R_2 u_2 = [G \;\; FG] \, u_2$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix} \qquad \begin{cases} u(1)+2u(0)=0 \\ 0=0 \\ 1 = u(0) \end{cases} \quad \begin{cases} u(1) = -2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Controllore dead-beat per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Per $\alpha = 1$ controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi?

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Controllore dead-beat? K^* t.c. $\Delta_{F+GK^*}(\lambda) = \lambda^3$?

i) Esistenza controllore dead-beat?

$\exists$ controllore dead-beat $\iff \Sigma = (F, G)$ è controllabile

Usiamo il test PBH di controllabilità:

Autovalori F: $0, \alpha$

Caso $\alpha = 0$: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3 \implies \Sigma$ controllabile

Caso $\alpha \neq 0$: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = \alpha$, $\nu_2 = 1$

$$PBH(\alpha) = [\alpha I - F \quad G] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(PBH(\alpha)) = \begin{cases} 2 & \alpha = -1 \\ 3 & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

- $\alpha = -1$: Σ non controllabile
- $\alpha \neq -1$: Σ controllabile

Controllore dead-beat esiste $\iff \alpha \neq -1$

ii) Calcolo K^* per $\alpha \neq -1$

Sia $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]$

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) = \det \left[\begin{array}{cc:c} \lambda - k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -1-k_1 & \lambda-\alpha-k_2 & -k_3 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

$$= \lambda\left((\lambda-k_1)(\lambda-\alpha-k_2) - k_2(1+k_1)\right)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + (-k_1-k_2-\alpha)\lambda + \alpha k_1 + \cancel{k_1 k_2} - k_2 - \cancel{k_1 k_2}\right)$$

$$= \lambda^3 + (-k_1-k_2-\alpha)\lambda^2 + (\alpha k_1 - k_2)\lambda \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} -k_1 - k_2 - \alpha = 0 \\ \alpha k_1 - k_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = \dfrac{-\alpha}{1+\alpha} \\ k_2 = \alpha k_1 \end{cases} \qquad K^* = \left[\dfrac{-\alpha}{1+\alpha} \;\; \dfrac{-\alpha^2}{1+\alpha} \;\; \beta\right], \;\; \beta \in \mathbb{R}$$

2) $\boxed{\alpha = 1}$ Calcolare controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel numero minimo di passi

$\alpha = 1$: $K^* = \left[-\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2} \;\; \beta\right], \;\; \beta \in \mathbb{R}$

$$\tilde{F} = F + GK^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1+\beta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalori di $\tilde{F}$: $\lambda_1 = 0 \quad \nu_1 = 3$

modi elementari:

$$\tilde{F}_J = \begin{cases} 0 & g_1 = 3 \longrightarrow \delta(t) \\ \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ \hdashline & & 0 \end{array}\right] & g_1 = 2 \longrightarrow \delta(t), \delta(t-1) \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} & g_1 = 1 \longrightarrow \delta(t), \delta(t-1), \delta(t-2) \end{cases}$$

Per portare a zero lo stato nel numero minimo di passi dobbiamo selezionare g_1 più grande possibile

$$g_1 = 3 - \operatorname{rank}\left(\lambda_1 I - \tilde{F}\right) = 3 - \operatorname{rank} \tilde{F}$$

<u>Per massimizzare g_1 dobbiamo minimizzare $\operatorname{rank} \tilde{F}$</u>

$$\tilde{F} = F + GK^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1+\beta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $1+\beta = -\beta$ $\operatorname{rank} \tilde{F} = 1$ (minimo)

$$\downarrow$$

$$\beta = -1/2$$

$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è il controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel numero min. di passi (2 passi)