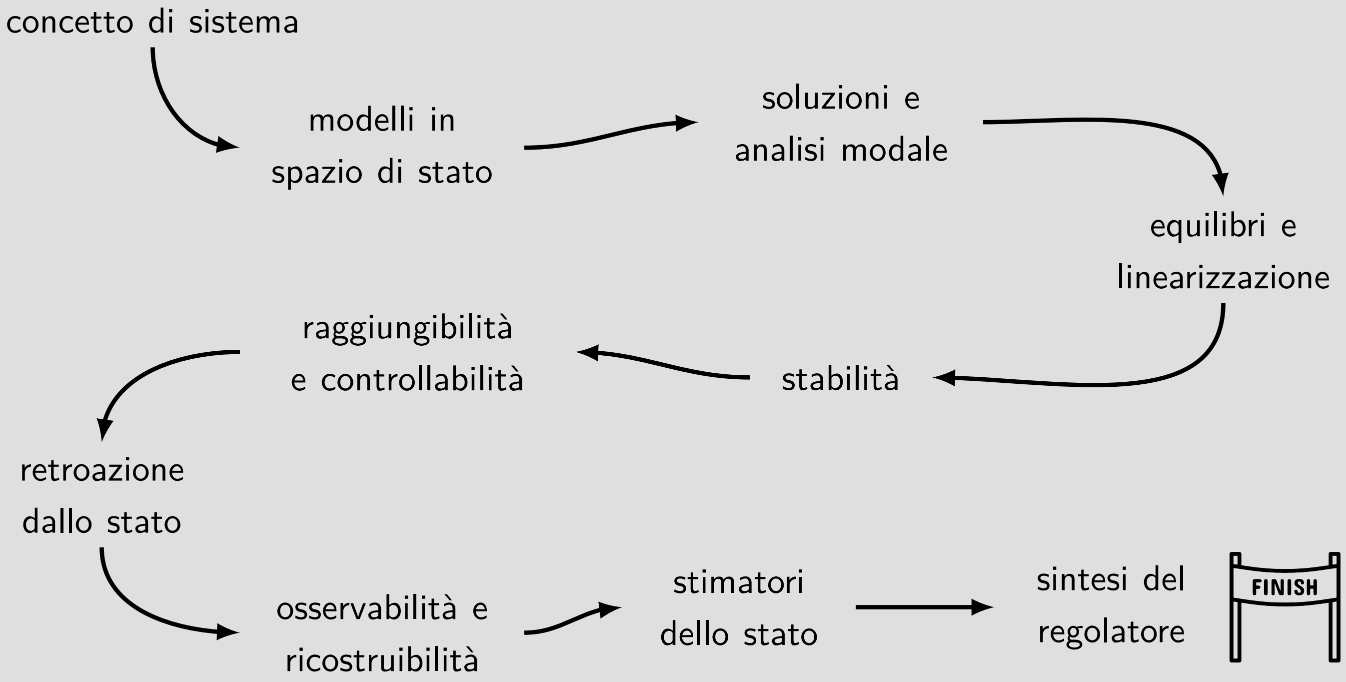
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

In questa lezione

- Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

note

Esercizio 1: soluzione

1. Sistema raggiungibile solo se $\alpha \neq 0$. Sistema controllabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $X_R(1) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\quad X_R(t) = \begin{cases} \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha = 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0, \end{cases} \quad t \geq 2,$

$$X_C(1) = \begin{cases} \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0, \end{cases} \qquad X_C(t) = \mathbb{R}^3, \quad t \geq 2.$$

In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 2

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Kalman di raggiungibilità?

2. Ingresso che porta nel minor numero possibile di passi lo stato

$$\text{da} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

note

Esercizio 2: soluzione

1. Prendendo $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$: $F_K = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$, $G_K = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. L'ingresso $u(0) = 1$, $u(1) = -2$ porta lo stato da $x(0)$ a x^* in 2 passi.

In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Controllore dead-beat per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Per $\alpha = 1$ controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi?

note

Esercizio 3: soluzione

1. $\alpha = -1$: controllore dead-beat non esiste.

   $\alpha \neq -1$: $K = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha+1} & -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

note

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1)+2) : Calcoliamo gli spazi ragg. e contr. e poi verifichiamo ragg. e contr. completa

<u>N.B.</u> : i) Per il primo i t.c. $X_R(i) = X_R(i+1) \implies X_R(j) = X_R(i) \;\; \forall j \geq i$

ii) Se $X_R(t) = \mathbb{R}^n \implies X_C(t) = \mathbb{R}^n$

Calcolo spazi ragg. e raggiungibilità:

$$X_R(1) = \operatorname{im} R_1 = \operatorname{im} G = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_R(2) = \operatorname{im} R_2 = \operatorname{im} \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{cases} \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha = 0 \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Quindi:

- $\alpha = 0$: per i) $X_R(1) = X_R(2) \implies X_R(t) = X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \;\; \forall t \geq 1$

$\implies \Sigma$ non ragg.

- $\alpha \neq 0$: $X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$X_R(t) = \mathbb{R}^3 \quad t \geq 2 \implies \Sigma$ ragg. (in 2 passi)

Calcolo spazi controllabili e controllabilità:

$$X_c(1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Fx \in X_R(1) = \operatorname{im} R_1 = \operatorname{im} G\} \quad \left(\operatorname{im} G = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right)$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 1\\0 & \alpha & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\\gamma\\0\end{bmatrix}, \ \beta,\gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{ \quad '' \quad : \begin{bmatrix}x_1\\-x_1+x_2+x_3\\\alpha(x_2+x_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\\gamma\\0\end{bmatrix}, \ \beta,\gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \begin{cases} \left\{\begin{bmatrix}\beta\\\delta\\\gamma+\beta-\delta\end{bmatrix}, \ \beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^3 & \alpha = 0 \\ \left\{\begin{bmatrix}\beta\\\delta\\-\delta\end{bmatrix}, \ \beta,\delta \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Quindi:

- $\alpha = 0$: $X_c(t) = \mathbb{R}^3 \quad \forall t \geq 1 \implies \Sigma$ controllabile (in 1 passo)
- $\alpha \neq 0$: $X_c(1) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} \ [\neq X_R(1)]$

  per ii) $X_c(t) = \mathbb{R}^3 \quad \forall t \geq 2 \implies \Sigma$ controllabile (in 2 passi)

Esercizio 2

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Kalman di raggiungibilità?
2. Ingresso che porta nel minor numero possibile di passi lo stato da

$$\text{da} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

note

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Forma di Kalman:

$$X_R = \operatorname{im} R = \operatorname{im} [\, G \;\; FG \;\; F^2G \,] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \Big\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \Big\}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & \tilde v_1 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad T^{-1} = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (T \text{ matrice di permutazione})$$

$$F_K = T^{-1} F T = T F T = T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G_K = T^{-1} G = T G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

2) Calcolare $u(t)$ t.c. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad x(\bar t) = x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $\bar t$ più piccolo possibile

- Esistenza di $u(t)$:

$x^* \in X_R$? $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \Big\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big\}$ $\quad$ sì

- Calcolo di u:

$t=1: \quad \underset{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}{\overset{\shortparallel}{x^*}} \in X_R(1) = \text{im}\, G = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$? No

$t=2: \quad x^* \in X_R(2) = \text{im}\begin{bmatrix}G & FG\end{bmatrix} = X_R = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$? Sì

$$u_2 = \begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$x^* = x(2) = R_2 u_2 = \begin{bmatrix}G & FG\end{bmatrix} u_2$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix} \qquad \begin{cases} u(1)+2u(0)=0 \\ 0=0 \\ 1 = u(0)\end{cases} \qquad \begin{cases} u(1) = -2 \\ u(0) = 1\end{cases}$$

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Controllore dead-beat per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Per $\alpha = 1$ controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi?

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Controllore dead-beat? K^* t.c. $\Delta_{F+GK^*}(\lambda) = \lambda^3$?

i) Esistenza controllore dead-beat?

$\exists$ controllore dead-beat $\iff \Sigma = (F, G)$ è controllabile

Usiamo il test PBH di controllabilità:

Autovalori F: $0, \alpha$

Caso $\alpha = 0$: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3 \implies \Sigma$ controllabile

Caso $\alpha \neq 0$: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = \alpha$, $\nu_2 = 1$

$$PBH(\alpha) = [\alpha I - F \;\; G] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(PBH(\alpha)) = \begin{cases} 2 & \alpha = -1 \\ 3 & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

- $\alpha = -1$: Σ non controllabile
- $\alpha \neq -1$: Σ controllabile

Controllore dead-beat esiste $\iff \alpha \neq -1$

ii) Calcolo K^* per $\alpha \neq -1$

Sia $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) = \det \left[\begin{array}{cc:c} \lambda - k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -1-k_1 & \lambda-\alpha-k_2 & -k_3 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

$$= \lambda\left((\lambda-k_1)(\lambda-\alpha-k_2) - k_2(1+k_1)\right)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + (-k_1-k_2-\alpha)\lambda + \alpha k_1 + \cancel{k_1k_2} - k_2 - \cancel{k_1k_2}\right)$$

$$= \lambda^3 + (-k_1-k_2-\alpha)\lambda^2 + (\alpha k_1 - k_2)\lambda \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} -k_1-k_2-\alpha = 0 \\ \alpha k_1 - k_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = \dfrac{-\alpha}{1+\alpha} \\ k_2 = \alpha k_1 \end{cases} \qquad K^* = \left[\dfrac{-\alpha}{1+\alpha} \quad \dfrac{-\alpha^2}{1+\alpha} \quad \beta\right], \ \beta \in \mathbb{R}$$

2) $\boxed{\alpha = 1}$ Calcolare controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel numero minimo di passi

$\alpha = 1$: $K^* = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \beta\right]$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\tilde{F} = F + GK^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1+\beta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalori di $\tilde{F}$: $\lambda_1 = 0$ $\nu_1 = 3$

modi elementari:

$$\tilde{F}_J = \begin{cases} 0 & g_1 = 3 \longrightarrow \delta(t) \\ \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ \hdashline & & 0 \end{array}\right] & g_1 = 2 \longrightarrow \delta(t), \delta(t-1) \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} & g_1 = 1 \longrightarrow \delta(t), \delta(t-1), \delta(t-2) \end{cases}$$

Per portare a zero lo stato nel numero minimo di passi dobbiamo selezionare g_1 più grande possibile

$$g_1 = 3 - \text{rank}\left(\lambda_1 I - \tilde{F}\right) = 3 - \text{rank}\,\tilde{F}$$

Per massimizzare g_1 dobbiamo minimizzare $\text{rank}\,\tilde{F}$

$$\tilde{F} = F + GK^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1+\beta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $1+\beta = -\beta$ $\quad \text{rank}\,\tilde{F} = 1$ (minimo)

$$\downarrow$$

$$\beta = -1/2$$

$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è il controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel numero min. di passi (2 passi)