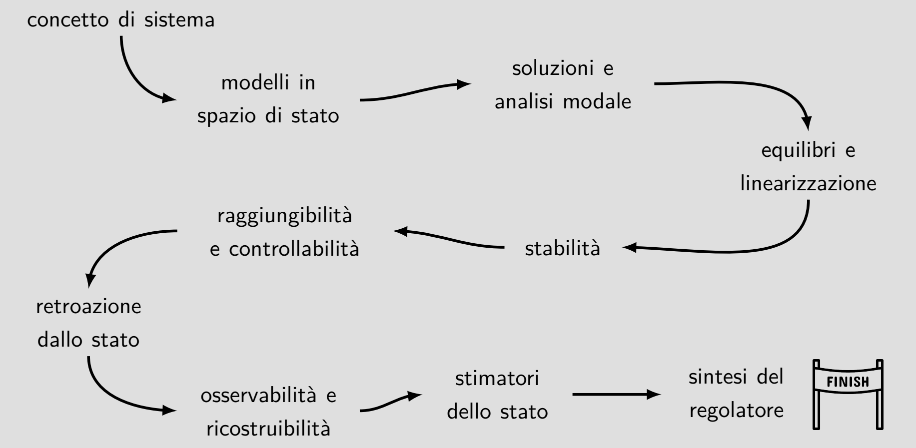
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio 1: soluzione

1. Sistema raggiungibile solo se $\alpha \neq 0$. Sistema controllabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $X_R(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\quad X_R(t) = \begin{cases}\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0,\end{cases} \quad t \geq 2,$

$$X_C(1) = \begin{cases}\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0,\end{cases} \qquad X_C(t) = \mathbb{R}^3, \quad t \geq 2.$$

Esercizio 2

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\0 & -1 & 0\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

1. Forma di Kalman di raggiungibilità?

2. Ingresso che porta nel minor numero possibile di passi lo stato

$$\text{da} \quad x(0) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{a} \quad x^* = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad ?$$

Esercizio 2: soluzione

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\0 & -1 & 0\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

1. Prendendo $T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$: $F_K = \left[\begin{array}{cc|c}2 & 0 & 4\\1 & 3 & 2\\\hline 0 & 0 & -1\end{array}\right]$, $G_K = \left[\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}\right]$

2. L'ingresso $u(0) = 1$, $u(1) = -2$ porta lo stato da $x(0)$ a x^* in 2 passi.

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & \alpha & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Controllore dead-beat per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Per $\alpha = 1$ controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi?

Esercizio 3: soluzione

1. $\alpha = -1$: controllore dead-beat non esiste.

   $\alpha \neq -1$: $K = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha+1} & -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.