

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

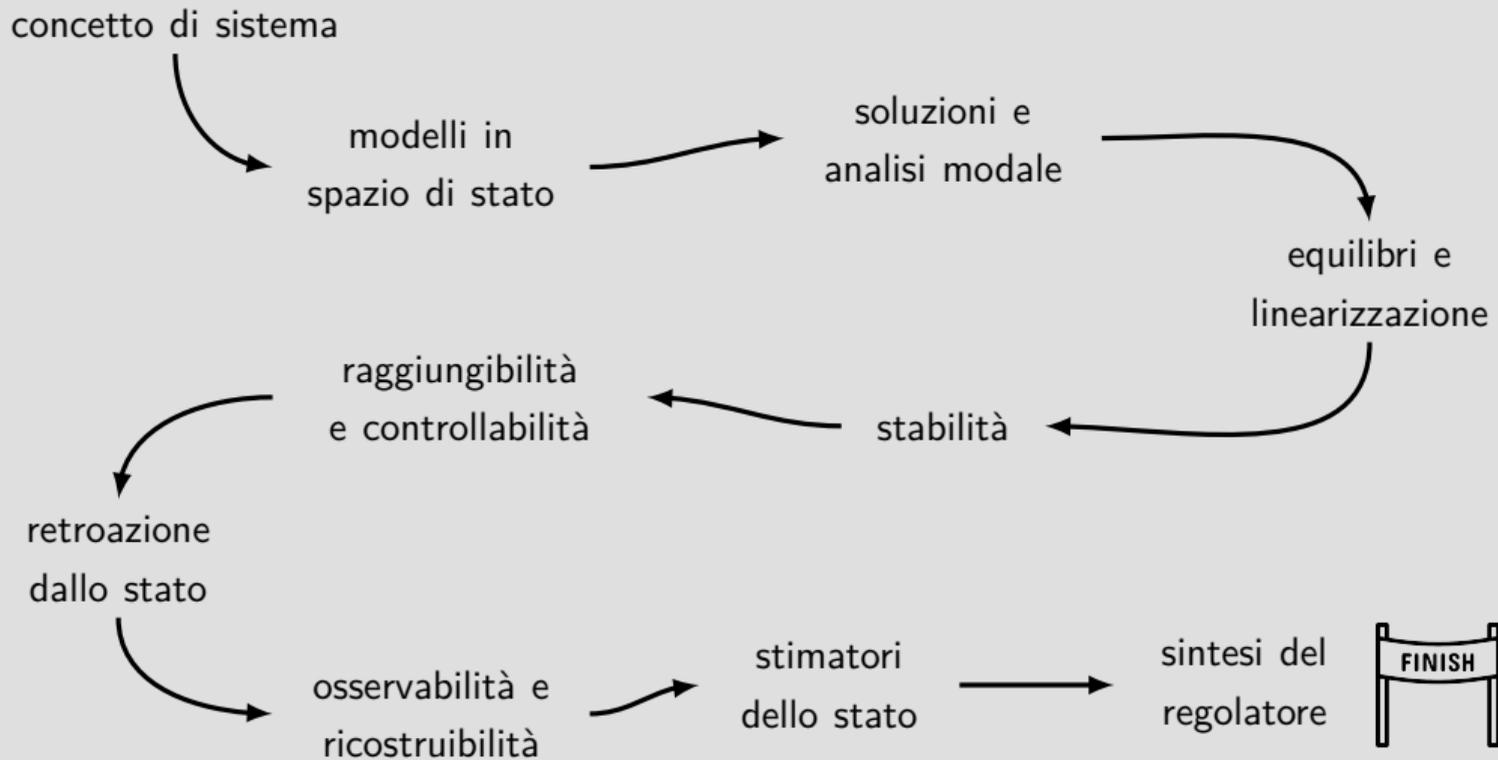
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 1

[riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio 1: soluzione

1. Sistema raggiungibile solo se $\alpha \neq 0$. Sistema controllabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$2. X_R(1) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad X_R(t) = \begin{cases} \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0, \end{cases} \quad t \geq 2,$$

$$X_C(1) = \begin{cases} \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0, \end{cases} \quad X_C(t) = \mathbb{R}^3, \quad t \geq 2.$$

Esercizio 2

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Kalman di raggiungibilità?
2. Ingresso che porta nel minor numero possibile di passi lo stato

$$\text{da } x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a } x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

Esercizio 2: soluzione

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Prendendo $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$: $F_K = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$, $G_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. L'ingresso $u(0) = 1$, $u(1) = -2$ porta lo stato da $x(0)$ a x^* in 2 passi.

Esercizio 3

[riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Controllore dead-beat per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Per $\alpha = 1$ controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi?

Esercizio 3: soluzione

1. $\alpha = -1$: controllore dead-beat non esiste.

$$\alpha \neq -1: K = \left[-\frac{\alpha}{\alpha+1} \quad -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} \quad \beta \right], \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. $K = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right].$