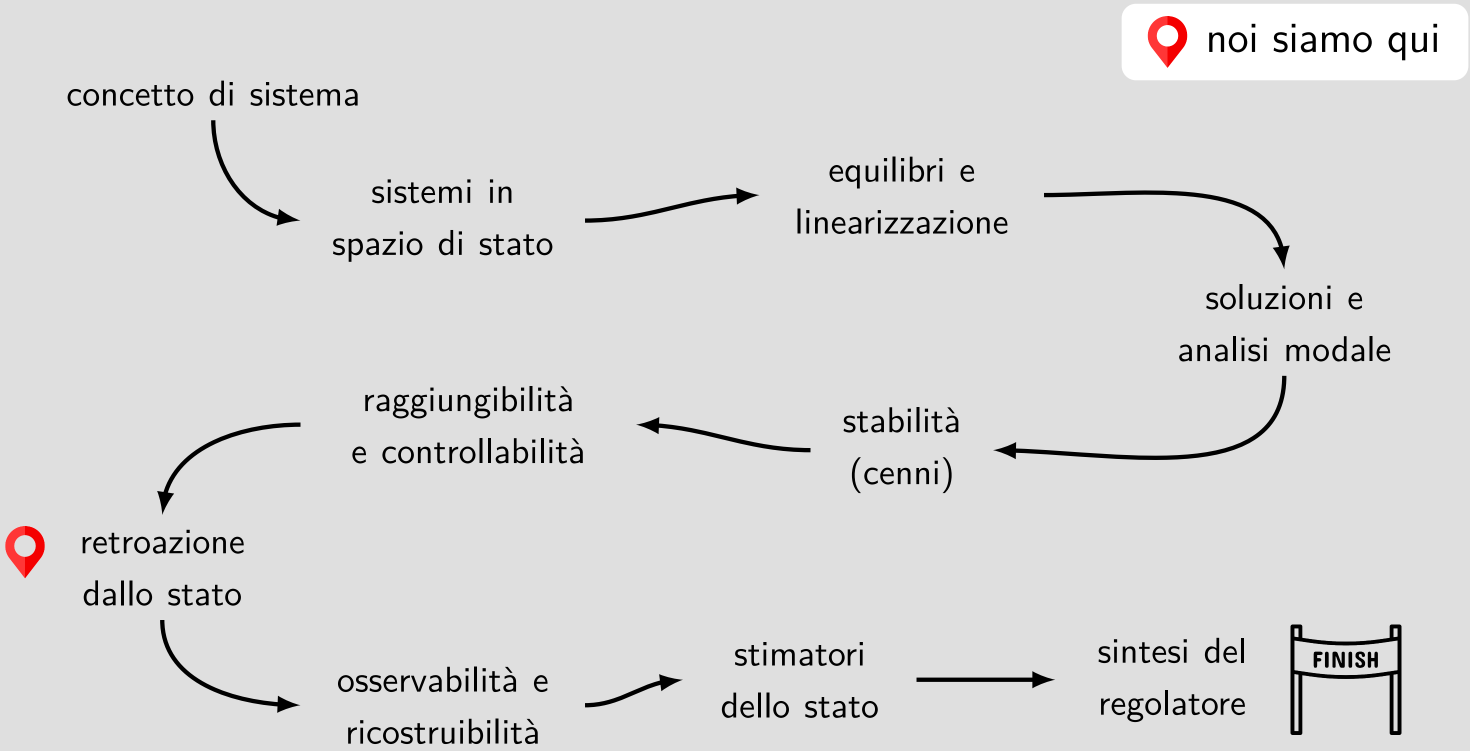
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 17: Introduzione al problema del controllo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

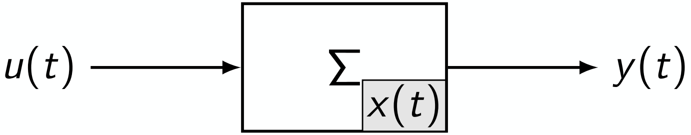

noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

In questa lezione

- Problemi di controllo in catena aperta e in retroazione
- Retroazione statica di sistemi lineari

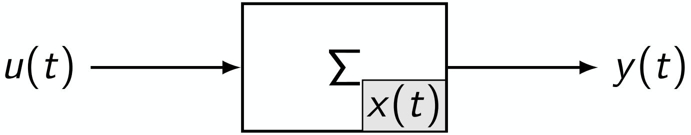
Il problema del controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Il problema del controllo

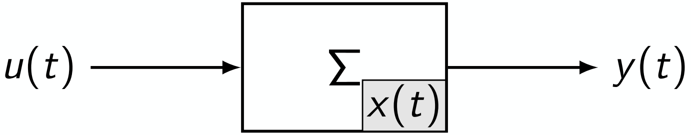
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

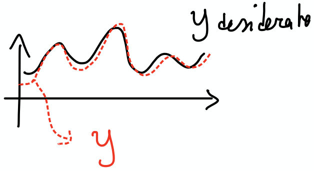


Controllo $=$ manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso $u(t)$

Problemi di controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$





portare e
ν

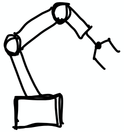
Problema di regolazione (regulation):
stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

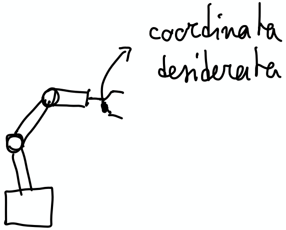
Problema di asservimento (tracking):
inseguire un andamento desiderato dell'uscita

problema di regolazione "tempo-variante"

Controllo in catena aperta o open-loop o feedforward

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$





$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad x(t)} \longrightarrow y(t)$$

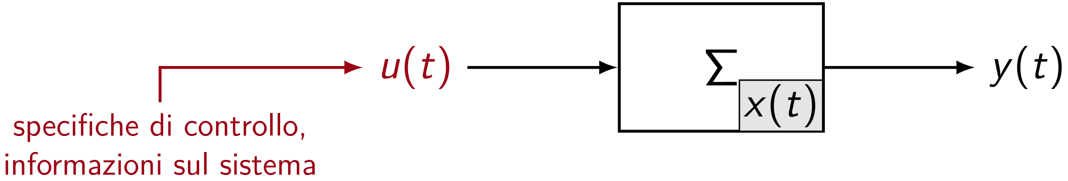
specifiche di controllo, informazioni sul sistema

legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

dipende dalla conoscenza del modello

Controllo in catena aperta o open-loop o feedforward

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

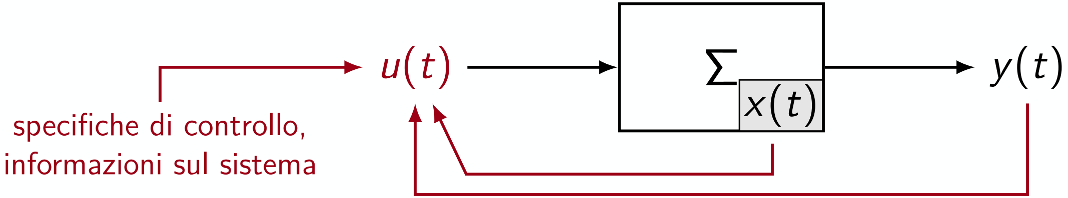


legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

approccio semplice, ma non ideale se il sistema
è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!

Controllo in retroazione o closed-loop o feedback

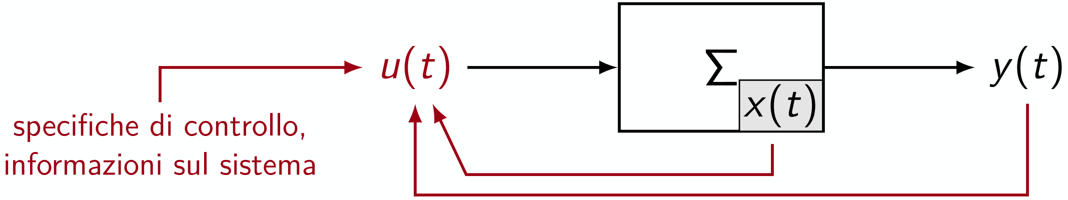
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

Controllo in retroazione o closed-loop o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

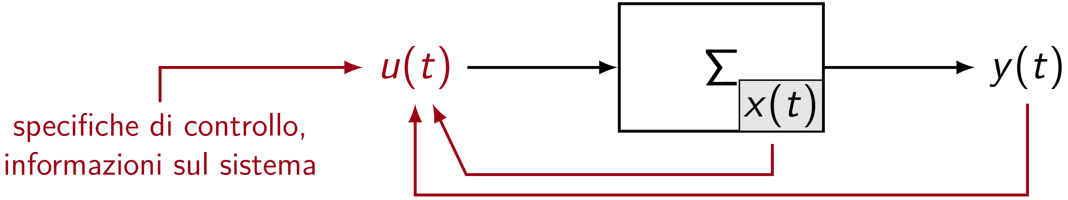


legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

approccio più complesso (richiede sensori di misura),
ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!

Controllo in retroazione o closed-loop o feedback

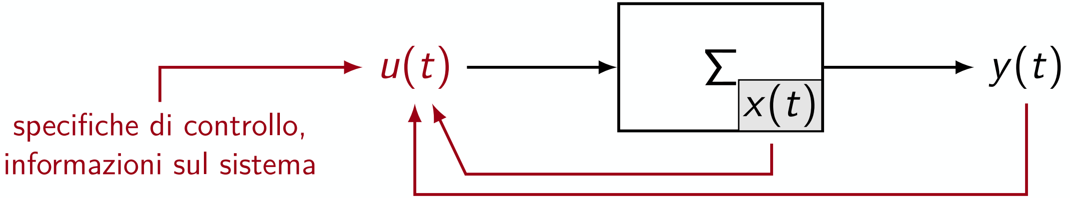
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



1. Retroazione statica
   - dallo stato: $u(t) = f(x(t))$ (allo stesso istante t!)
   - dall'uscita: $u(t) = f(y(t))$ (allo stesso istante t!)

Controllo in retroazione o closed-loop o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



2. Retroazione dinamica

- dallo stato: $u(t) = \underbrace{f(u(\tau), x(\tau))}_{\text{sistema dinamico}}$, $\tau \in [t_0, t]$, $t_0 < t$
- dall'uscita: $u(t) = f(u(\tau), y(\tau))$, $\tau \in [t_0, t]$, $t_0 < t$

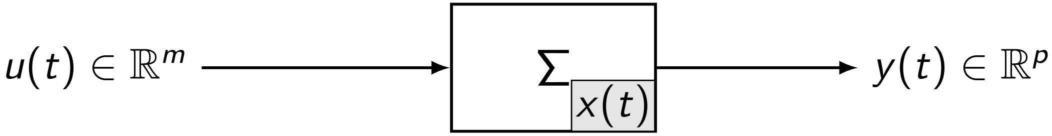
In questa lezione

- Problemi di controllo in catena aperta e in retroazione
- Retroazione statica di sistemi lineari

Controllo in retroazione statica di sistemi lineari

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

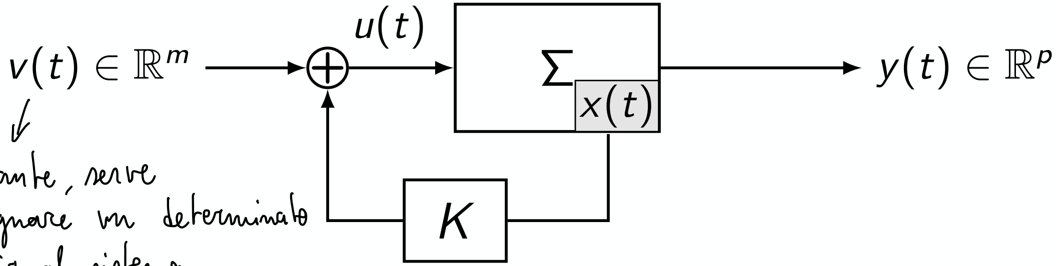
$$y(t) = Hx(t)$$



Controllo in retroazione statica di sistemi lineari

$$\dot{x}(t) = (F + GK)x(t) + Gv(t), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t)$$



se costante, serve per assegnare un determinato equilibrio al sistema

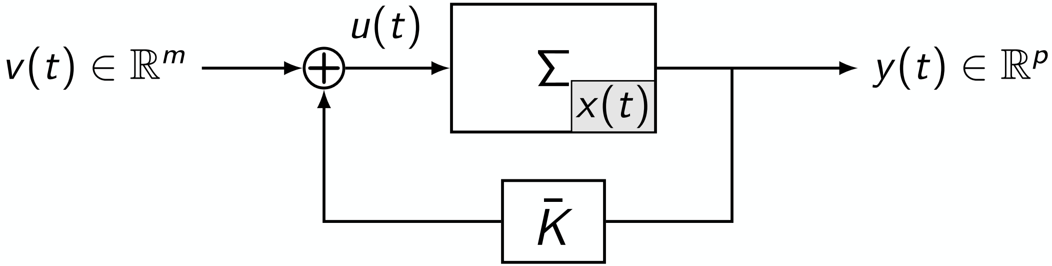
$$u(t) = Kx(t) + v(t), \; K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$ **retroazione statica dallo stato**

↳ m=1 vettore riga

Controllo in retroazione statica di sistemi lineari

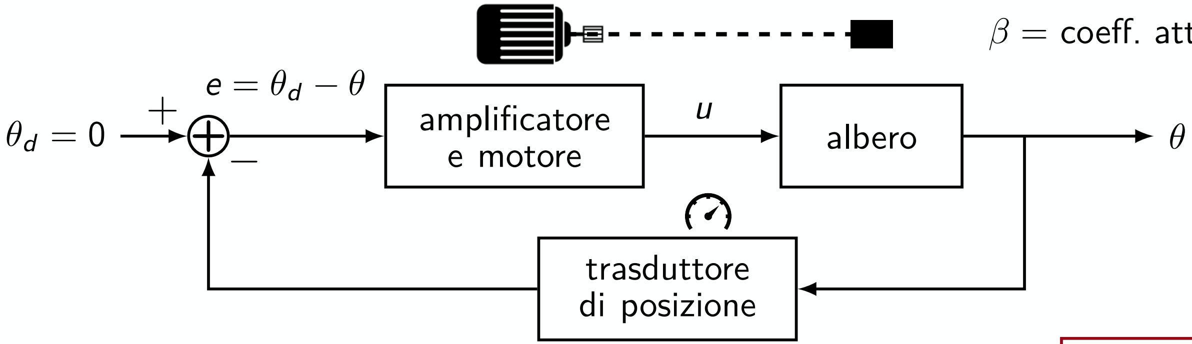
$$\dot{x}(t) = (F + G\bar{K}H)x(t) + Gv(t), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t)$$



$u(t) = \bar{K}\overbrace{Hx(t)}^{y(t)} + v(t)$, $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ **retroazione statica dall'uscita**

Esempio: retroazione dall'uscita



J = inerzia albero

β = coeff. attrito viscoso

Retroazione statica dall'uscita

Vincoli nelle prestazioni di controllo!

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = ke,\ k \in \mathbb{R}$$

$$y = \theta$$

$$\Longrightarrow$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

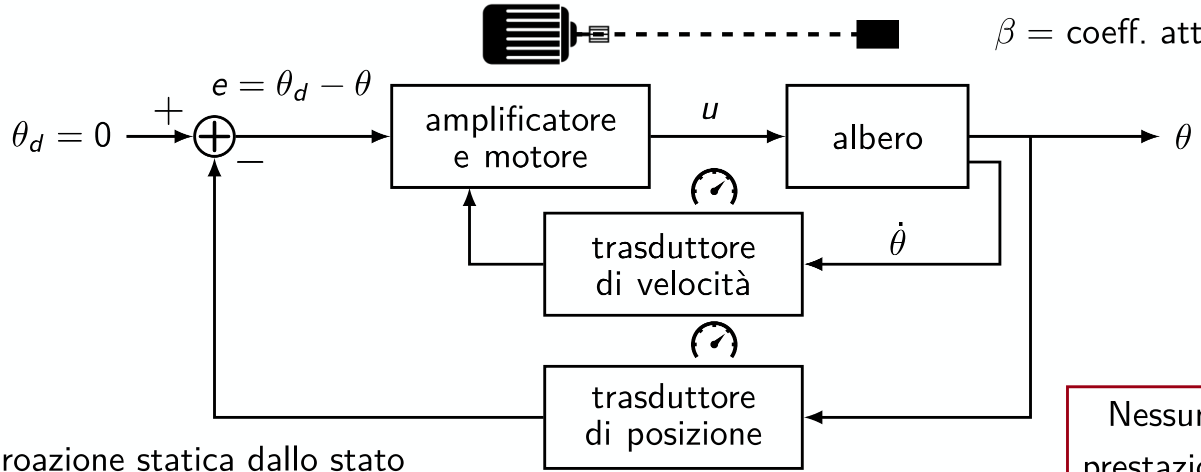
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

note

Esempio: retroazione dallo stato

$J =$ inerzia albero

$\beta =$ coeff. attrito viscoso



Nessun vincolo nelle prestazioni di controllo!

Retroazione statica dallo stato

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = k_1 e + k_2\dot{\theta},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$y = \theta$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

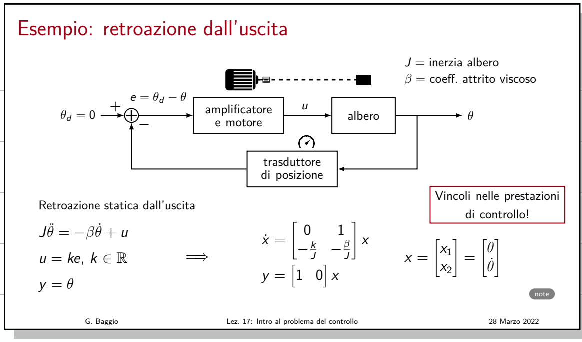
Lez. 17: Introduzione al problema del controllo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io



Problema: Regolare la posizione angolare di un albero meccanico collegato all'asse di un motore in CC

Obiettivo: Costruire un sistema di controllo in modo che, se l'albero viene spostato rispetto ad un angolo desiderato θ_d, esso vi ritorni il più rapidamente possibile.

Usiamo un controllo di tipo proporzionale: Coppia esercitata dal motore proporzionale all'errore $e(t) = \theta_d - \theta(t)$

Ipotesi: 1) Costanti di tempo trasduttore/motore trascurabili rispetto alla costante di tempo meccanica

2) $\theta_d = 0$ per semplicità

Equazioni del moto dell'albero:

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

$$u(t) = K e(t) = K(\theta_d - \theta(t)) = -K\theta(t) = -KHx(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (F - GKH)x = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta/J \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

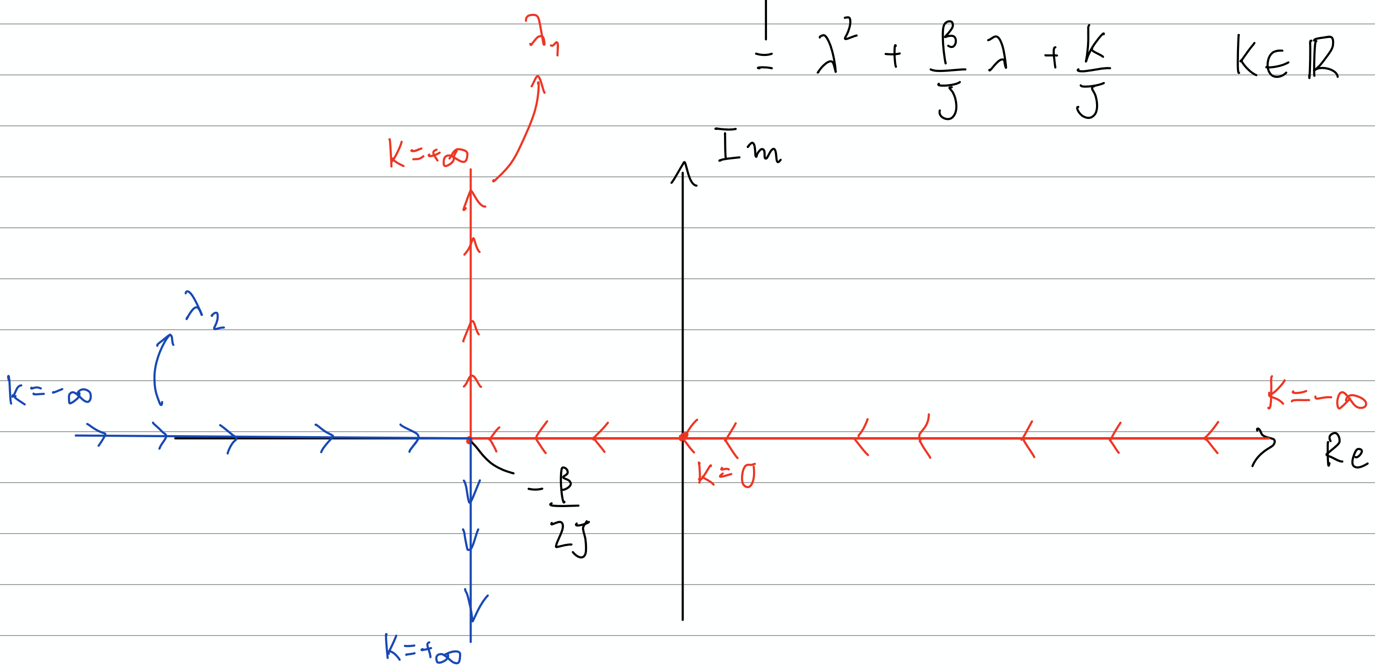
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x$$

Obiettivo: Scegliere $K \in \mathbb{R}$ t.c. i modi del sistema retroazionato vanno a zero il più rapidamente possibile (= parte reale degli autovalori di $F - GKH$ la più negativa possibile)

$$\Delta_{F+GKH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GKH) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K}{J} & \lambda + \frac{\beta}{J} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{\beta}{J}\right) + \frac{K}{J}$$

$$= \lambda^2 + \frac{\beta}{J}\lambda + \frac{K}{J} \qquad K \in \mathbb{R}$$

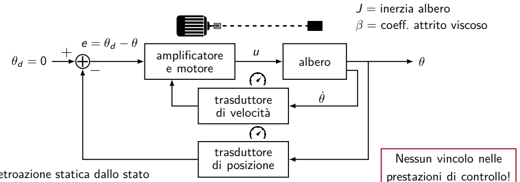


$$\forall K \in \mathbb{R} \qquad \max_{i=1,2} \mathrm{Re}[\lambda_i] \geq -\frac{\beta}{2J}$$

→ i modi elementari del sistema retroazionato non potranno mai tendere a zero più rapidamente di $e^{-\frac{\beta}{2J}t}$

→ vincoli sulla prontezza del sistema retroazionato!

Esempio: retroazione dallo stato



Nessun vincolo nelle prestazioni di controllo!

Retroazione statica dallo stato

$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u$

$u = k_1 e + k_2\dot\theta,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \dot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J}\end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}$

$y = \theta \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot x = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases} \xrightarrow{\ u = k_1 \overset{\theta_d - \theta}{e} + k_2\dot\theta = -k_1 x_1 + k_2 x_2\ } \begin{cases} \dot x = \left(F + G\overbrace{\begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \end{bmatrix}}^{K}\right) x \\ y = Hx \end{cases}$$

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{J} & \frac{k_2}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{(\beta - k_2)}{J} \end{bmatrix} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_1}{J} & \lambda + \frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{\beta - k_2}{J}\right) + \frac{k_1}{J}$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{\beta - k_2}{J}\right)\lambda + \frac{k_1}{J} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + \overbrace{(-\lambda_1 - \lambda_2)}^{p_1}\lambda + \underbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2}_{p_2}$$

λ_1, λ_2 autovalori desiderati

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\beta - k_2}{J} \\ p_2 = \frac{k_1}{J} \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = \beta - p_1 J \\ k_1 = p_2 J \end{cases} \longrightarrow$$

Quindi usando una retroazione statica dallo stato possiamo ottenere una qualsiasi scelta di autovalori λ_1, λ_2 del sistema retr.

non abbiamo alcun vincolo
sulle prestazioni di controllo
(prontezza del sistema retroazionato)