Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{(K)} : \; x(t+1) = (F + GK)\,x(t) + Gv(t)$$

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$: cambio di base di Kalman

$\Sigma^{(K)}$ nella base di Kalman: $z = T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, k \\ \}\, n-k \end{matrix}$ $\quad K_K = KT = [\underbrace{K_1}_{k} \; \underbrace{K_2}_{n-k}]$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{c} \\ k \end{array}\!\!\begin{array}{c} k \\ \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \end{array} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

La retroazione non influenza il sottosistema non raggiungibile!

Se Σ è non raggiungibile allora non riusciremo mai ad assegnare a $\Sigma^{(K)}$ una qualsiasi scelta di autovalori desiderati!

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \ x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$
$$\Sigma^{(K)}: \ x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Quando è possibile assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$

Teorema: Per ogni polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \ p_i \in \mathbb{R},$$

esiste una matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tale che $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ se e solo se il sistema Σ è raggiungibile.

note

Σ non ragg. $\Longrightarrow \nexists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ per ogni scelta $p(\lambda)$

$\downarrow$

forma di Kalman di $\Sigma^{(K)}$

"Σ raggiungibile $\Longrightarrow \exists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ per ogni scelta di $p(\lambda)$"

<u>Sketch di dimostrazione:</u>

1) Se Σ raggiungibile allora $\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

$$F_c = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad g_c = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forma canonica di controllo!

dove $\Delta_F(\lambda) = \Delta_{F_c}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

2) $\Sigma^{(K)}$ espresso nella base T del punto 1): $K_c = KT = [k_{c,1} \ \cdots \ k_{c,n}]$

Matrice di stato di $\Sigma^{(K)}$:

$$F_c + g_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_{c,1} \ \cdots \ k_{c,n}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{c,1} & -\alpha_1 + k_{c,2} & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{c,n} \end{bmatrix}$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{c,1} & -\alpha_1 + k_{c,2} & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{c,n} \end{bmatrix}, \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \Delta_{F+gK}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - K_{c,n})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - K_{c,2})\lambda + (\alpha_0 - K_{c,1})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

Scegliendo: $K^*_{c,i} = \alpha_{i-1} - p_{i-1} \quad i = 1, \dots, n \qquad K_c^* = [K_{c,1}^* \ \cdots \ K_{c,n}^*]$

$\Longrightarrow \ \exists\, K^* = K_c^* T^{-1}$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda) \quad \forall\, p(\lambda)$

3) Matrice di retroazione desiderata esiste ed ha forma $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ $\forall\, p(\lambda)$

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

note

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K^* = [k_1^* \ k_2^* \ k_3^*] \text{ t.c. } \Delta_{F+gK^*}(\lambda) = \lambda^3$$

1) Esistenza di K^*:

Verificchiamo se Σ è raggiungibile

$$R = [G \ \ FG \ \ F^2G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det R = 1 - 3 = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow \Sigma$ raggiungibile

$\Rightarrow \exists K^* !$

2) $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda) \qquad K = [k_1 \ k_2 \ k_3], \ k_i \in \mathbb{R}$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1-k_1 & -2-k_2 & -k_3 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -k_1 & -1-k_2 & \lambda-k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1-k_1)(\lambda-k_3) - k_1(2+k_2) - \lambda k_1 k_3 - (\lambda-1-k_1)(1+k_2)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + \lambda(-1-k_1-k_3) + k_3(1+k_1)\right) - 2k_1 - k_1k_2 - \lambda k_1 k_3$$
$$+ \lambda(-1-k_2) + (1+k_1)(1+k_2)$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-1-k_1-k_3) + \lambda(k_3 + \cancel{k_1k_3} - \cancel{k_1k_3} - 1 - k_2)$$
$$+ (-2k_1 - \cancel{k_1k_2} + 1 + k_1 + k_2 + \cancel{k_1k_2})$$

$$\Delta_{F+gk}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(-1-k_1-k_3) + \lambda(k_3 + \cancel{k_1 k_3} - \cancel{k_1 k_3} - 1 - k_2)$$
$$+ (-2k_1 - \cancel{k_1 k_2} + 1 + k_1 + k_2 + \cancel{k_1 k_2}) \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} -1-k_1-k_3=0 \\ k_3-1-k_2=0 \\ 1-k_1+k_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{"} \\ k_3 - \cancel{1} - k_1 + \cancel{1} = 0 \\ k_2 = k_1 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = -1/2 \\ k_3 = k_1 = -1/2 \\ k_2 = -3/2 \end{cases}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Σ raggiungibile?

$$R = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank } R = 2 \Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile}$$

Σ raggiungibile da 1 ingresso?

1° ingresso: $R^{(1)} = [g_1 \quad Fg_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ rank $R^{(1)} = 1 \Rightarrow \Sigma^{(1)} = (F, g_1)$ non ragg.

2° ingresso: $R^{(2)} = [g_2 \quad Fg_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rank $R^{(2)} = 1 \Rightarrow \Sigma^{(2)} = (F, g_2)$ non ragg.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m},\ m > 1$$
$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

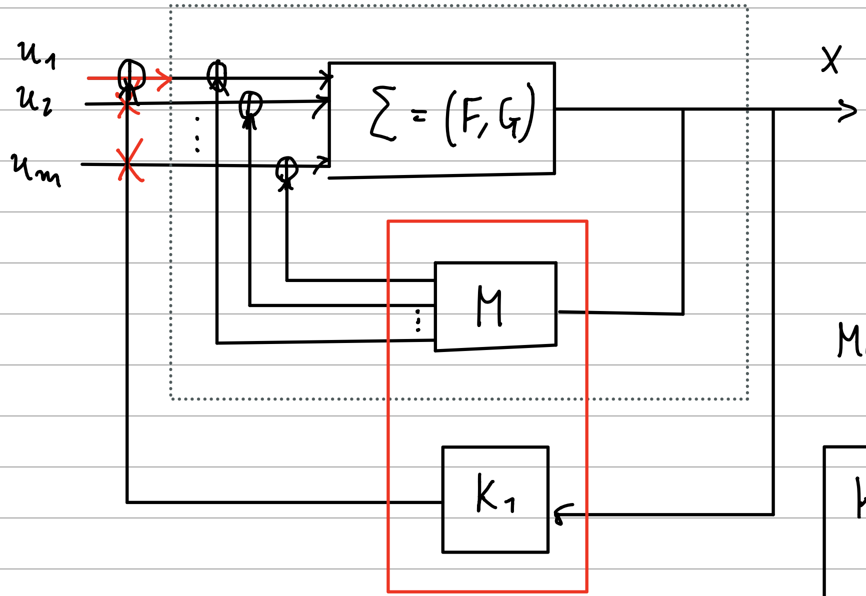
Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

note

$\Sigma = (F, G) \quad g_1 \neq 0$

$\Sigma_{pre} = (F + GM,\ g_1)$ ragg.



Matrice di retroazione "complessiva"

$$\boxed{K^* = M + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$$

<u>Teorema</u>: $\exists\, K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.c. $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$, per ogni scelta

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

se e solo se $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$K^* \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ t.c. $\Delta_{F+GK^*}(\lambda) \overset{!}{=} (\lambda - 1/2)^2 = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$

Σ ragg. ma non da 1 ingresso

Usiamo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ come matrice di pre-retroazione per il 1° ingresso

$\Sigma_{pre} = (F + GM, g_1)$ è raggiungibile?

$\mathcal{R}_{pre} = [\, g_1 \ \ (F+GM) g_1 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma_{pre}$ è ragg.

Calcoliamo $K = [k_1 \ k_2]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\Delta_{F+GM+g_1K}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$

$$\Delta_{F+GM+g_1K}(\lambda) = \det(\lambda I - \underbrace{F}_{0} - \underbrace{G}_{I}M - g_1 K) = \det \begin{bmatrix} \lambda - k_1 & -k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - k_1) - k_2$$

$$= \lambda^2 - k_1\lambda - k_2 \overset{!}{=} \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1/4 \end{cases}$$

Matrice di retroazione $K^* = M + \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$F + GK^* \rightarrow$ ha autov. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ $\nu_1 = 2$