Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in spazio di stato

soluzioni e analisi modale

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

FINISH

Nella scorsa lezione

"fragile"

- Problemi di controllo in catena aperta e in retroazione

  statico

  dinamico

  "robusto"

- Retroazione statica di sistemi lineari

Σ retroazionato dallo stato

$$x(t+1) = (F + GK)\,x(t) + G\,v(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

matrice di retroazione

Σ retroazionato dall'uscita

$$x(t+1) = (F + G\bar{K}H)\,x(t) + G\,v(t), \quad \bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

In questa lezione

- ▷ Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- ▷ Stabilizzabilità

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T?

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cambio base : $z(t) = T^{-1}x(t)$ $[x(t) = Tz(t)]$

$$\Sigma^{(K)'} : \quad Tz(t+1) = (F + GK)Tz(t) + Gv(t)$$

$$z(t+1) = (T^{-1}FT + T^{-1}GKT)z(t) + T^{-1}Gv(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \quad G' = T^{-1}G, \quad \boxed{K' = KT}$$

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$\boxed{\text{Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base } T\text{?}}$

$$F' = T^{-1}FT, \quad G' = T^{-1}G, \quad K' = KT$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

note

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

note

In questa lezione

- Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- Stabilizzabilità

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Quando è possibile assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$

note

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

Quando è possibile assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati?

Teorema: Per ogni polinomio (monico, di grado n)

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \;\; p_i \in \mathbb{R},$$

esiste una matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tale che $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ se e solo se il sistema Σ è raggiungibile.

note

Allocazione degli autovalori ($m = 1$): metodo diretto

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \;\; \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$

Allocazione degli autovalori ($m = 1$): metodo diretto

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \ \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F + gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$

come radici

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 =$ polinomio con autovalori desiderati

$\boxed{\text{Risolvere } \Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda) \text{ con incognita } K}$

$$\Downarrow$$

Sistema di equazioni lineari con incognite $k_1, \ldots, k_n$, $K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

note

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

note

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora possiamo cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di F_{11} (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora possiamo cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di F_{11} (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).

3. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) tutti i modi del sistema retroazionato convergono a zero in tempo finito. Il controllore in questo caso viene detto controllore dead-beat! dead-beat controller (DBC)

$$\boxed{\exists \text{ controllere dead-beat} \iff \Sigma \text{ controllabile}}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.

2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora possiamo cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di F_{11} (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).

3. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) tutti i modi del sistema retroazionato convergono a zero in tempo finito. Il controllore in questo caso viene detto controllore dead-beat!

4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo, ma in questo caso non si possono avere controllori dead-beat.

In questa lezione

$$\Sigma = (F, G, K) \xrightarrow{T} \Sigma' = (T^{-1}FT, T^{-1}G, KT)$$

Forma di Kalman di $\Sigma^{(K)}$:

$$\begin{bmatrix} F_{11}+G_1K_1 & F_{12}+G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▷ Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$ $\longrightarrow$ $\exists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ $\forall\, p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0$
  $$\Updownarrow$$
  $\Sigma = (F, g)$ è ragg.
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- ▷ Stabilizzabilità

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t) \qquad K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\boxed{\text{Se } \Sigma \text{ è raggiungibile, è possibile assegnare a } F+GK \text{ degli autovalori desiderati?}}$$

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma\colon \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}\colon \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$$\boxed{\text{Se } \Sigma \text{ è raggiungibile, è possibile assegnare a } F+GK \text{ degli autovalori desiderati?}}$$

$$F + GK = F + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \in\mathbb{R}^n & & \in\mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \in\mathbb{R}^{1\times n} \\ \\ \leftarrow \in\mathbb{R}^{1\times n} \end{array} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$\boxed{\text{Se } \Sigma \text{ è raggiungibile, è possibile assegnare a } F + GK \text{ degli autovalori desiderati?}}$$

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + \overset{0}{\cancel{g_1 k_1}} + \underset{g_i k_i}{\cdots} + \overset{0}{\cancel{g_m k_m}}$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima per il caso singolo ingresso ($m = 1$)!

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima per il caso singolo ingresso ($m = 1$)!

Problema: Anche se il sistema Σ è raggiungibile, non è detto che lo sia usando un singolo ingresso !!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

note

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}, \ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}, \; m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}, \ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

matrice di pre-retroazione

note

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

note

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1.

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

note

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!
2. Un approccio alternativo è usare il metodo diretto (cioè risolvere $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$ con incognite gli elementi di K) anche nel caso $m > 1$. In questo caso, però il sistema di equazioni da risolvere potrebbe essere non lineare!

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!
2. Un approccio alternativo è usare il metodo diretto (cioè risolvere $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$ con incognite gli elementi di K) anche nel caso $m > 1$. In questo caso, però il sistema di equazioni da risolvere potrebbe essere non lineare!
3. L'approccio tramite lemma di Heymann ci permette di allocare gli autovalori della matrice $F + GK$ a nostro piacimento anche per $m > 1$, ma ha delle limitazioni. Ad esempio, usando un singolo ingresso non si possono ottenere controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$. Usando più ingressi invece è possibile costruire controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$! Tramite tecniche di controllo più avanzate che sfruttano tutti gli ingressi di controllo si possono ottenere quindi prestazioni di controllo migliori.

In questa lezione

- Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- Stabilizzabilità

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno modulo < 1.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno parte reale < 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

note

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)\, x(t) + Gv(t)$$

$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$: cambio di base di Kalman

$\Sigma^{(K)}$ nella base di Kalman: $z = T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, k \\ \}\, n-k \end{matrix}$ $\quad K_K = KT = [\underbrace{K_1}_{k} \ \underbrace{K_2}_{n-k}]$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{c} \\ k \end{array}\!\!\begin{array}{c} k \\ \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \end{array} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

La retroazione non influenza il sottosistema non raggiungibile!

Se Σ è non raggiungibile allora non riusciremo mai ad assegnare a $\Sigma^{(K)}$ una qualsiasi scelta di autovalori desiderati!

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \; x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$
$$\Sigma^{(K)}: \; x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Quando è possibile assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$

Teorema: Per ogni polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \; p_i \in \mathbb{R},$$

esiste una matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tale che $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ se e solo se il sistema Σ è raggiungibile.

note

Σ non ragg. $\Longrightarrow \nexists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ per ogni scelta $p(\lambda)$

$\downarrow$

forma di Kalman di $\Sigma^{(K)}$

"Σ raggiungibile $\Longrightarrow \exists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ per ogni scelta di $p(\lambda)$"

Sketch di dimostrazione:

1) Se Σ raggiungibile allora $\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

$$F_c = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad g_c = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forma canonica di controllo!

dove $\Delta_F(\lambda) = \Delta_{F_c}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

2) $\Sigma^{(K)}$ espresso nella base T del punto 1): $K_c = KT = [k_{c,1} \cdots k_{c,n}]$

Matrice di stato di $\Sigma^{(K)}$:

$$F_c + g_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_{c,1} \cdots k_{c,n}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{c,1} & -\alpha_1 + k_{c,2} & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{c,n} \end{bmatrix}$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{c,1} & -\alpha_1 + k_{c,2} & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{c,n} \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \Delta_{F + gK}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - K_{c,n})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - K_{c,2})\lambda + (\alpha_0 - K_{1,1})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

Scegliendo: $K^*_{c,i} = \alpha_{i-1} - p_{i-1} \quad i = 1, \dots, n \quad K_c^* = [K_{c,1}^* \ \cdots \ K_{c,n}^*]$

$\Longrightarrow \ \exists \, K^* = K_c^* T^{-1}$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda) \quad \forall \, p(\lambda)$

3) Matrice di retroazione desiderata esiste ed ha forma $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$
$\forall \, p(\lambda)$

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

note

$$F = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$K^* = [k_1^* \; k_2^* \; k_3^*] \text{ t.c. } \Delta_{F+gK^*}(\lambda) = \lambda^3$$

1) Esistenza di K^*.

Verificiamo se Σ è raggiungibile

$$R = [G \;\; FG \;\; F^2G] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \det R = 1 - 3 = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow \Sigma$ raggiungibile

$\Rightarrow \exists K^*!$

2) $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda) \qquad K = [k_1 \; k_2 \; k_3], \; k_i \in \mathbb{R}$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = \det \begin{bmatrix}\lambda-1-k_1 & -2-k_2 & -k_3\\ 0 & \lambda & -1\\ -k_1 & -1-k_2 & \lambda-k_3\end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1-k_1)(\lambda-k_3) - k_1(2+k_2) - \lambda k_1 k_3 - (\lambda-1-k_1)(1+k_2)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + \lambda(-1-k_1-k_3) + k_3(1+k_1)\right) - 2k_1 - k_1k_2 - \lambda k_1 k_3$$
$$+ \lambda(-1-k_2) + (1+k_1)(1+k_2)$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-1-k_1-k_3) + \lambda(k_3 + \cancel{k_1k_3} - \cancel{k_1k_3} - 1 - k_2)$$
$$+ (-2k_1 - \cancel{k_1k_2} + 1 + k_1 + k_2 + \cancel{k_1k_2})$$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(-1-k_1-k_3) + \lambda(k_3 + \cancel{k_1k_3} - \cancel{k_1k_3} - 1 - k_2)$$
$$+ (-2k_1 - \cancel{k_1k_2} + 1 + k_1 + k_2 + \cancel{k_1k_2}) \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} -1-k_1-k_3 = 0 \\ k_3 - 1 - k_2 = 0 \\ 1 - k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{"} \\ k_3 - \cancel{1} - k_1 + \cancel{1} = 0 \\ k_2 = k_1 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = -1/2 \\ k_3 = k_1 = -1/2 \\ k_2 = -3/2 \end{cases}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Σ raggiungibile?

$$R = [G \ \ FG] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank}\, R = 2 \Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile}$$

Σ raggiungibile da 1 ingresso?

1° ingresso: $R^{(1)} = [g_1 \ \ Fg_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rank}\, R^{(1)} = 1 \Rightarrow \Sigma^{(1)} = (F, g_1)$ non ragg.

2° ingresso: $R^{(2)} = [g_2 \ \ Fg_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rank}\, R^{(2)} = 1 \Rightarrow \Sigma^{(2)} = (F, g_2)$ non ragg.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m},\ m > 1$$
$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

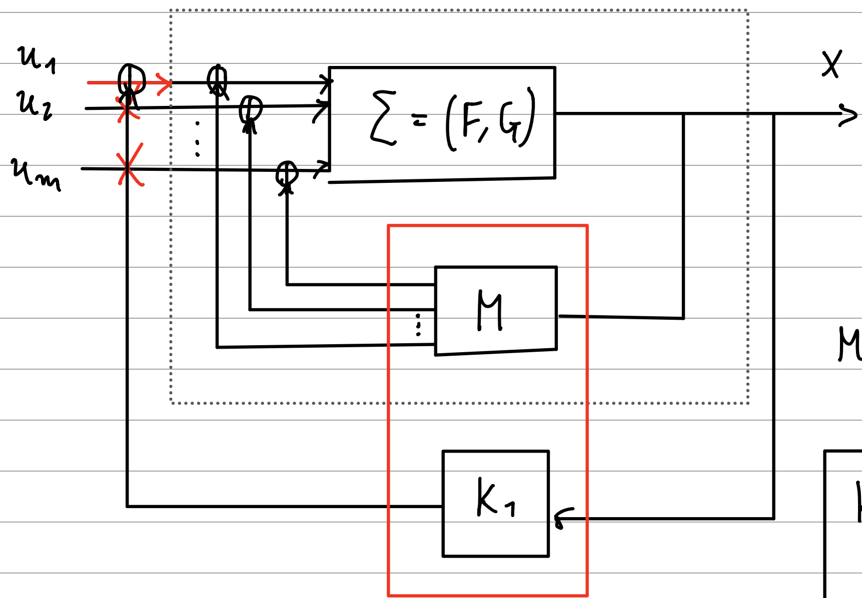
Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

note

$\Sigma = (F, G) \quad g_1 \neq 0$

$\Sigma_{pre} = (F + GM, g_1)$ ragg.



Matrice di retroazione "complessiva"

$$\boxed{K^* = M + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$$

<u>Teorema</u>: $\exists\, K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.c. $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$, per ogni scelta

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

se e solo se $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$K^* \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ t.c. $\Delta_{F+GK^*}(\lambda) \overset{!}{=} (\lambda - 1/2)^2 = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$

Σ ragg. ma non da 1 ingresso

Usiamo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ come matrice di pre-retroazione per il 1° ingresso

$\Sigma_{pre} = (F + GM, g_1)$ è raggiungibile?

$R_{pre} = [\, g_1 \ \ (F+GM) g_1 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma_{pre}$ è ragg.

Calcoliamo $K = [k_1 \ k_2]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\Delta_{F+GM+g_1K}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$

$$\Delta_{F+GM+g_1K}(\lambda) = \det(\lambda I - \overset{0}{F} - \overset{I}{G}M - g_1 K) = \det \begin{bmatrix} \lambda - k_1 & -k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - k_1) - k_2$$

$$= \lambda^2 - k_1\lambda - k_2 \overset{!}{=} \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1/4 \end{cases}$$

Matrice di retroazione $K^* = M + \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | $F + GK^* \to$ ha autov. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ $\nu_1 = 2$