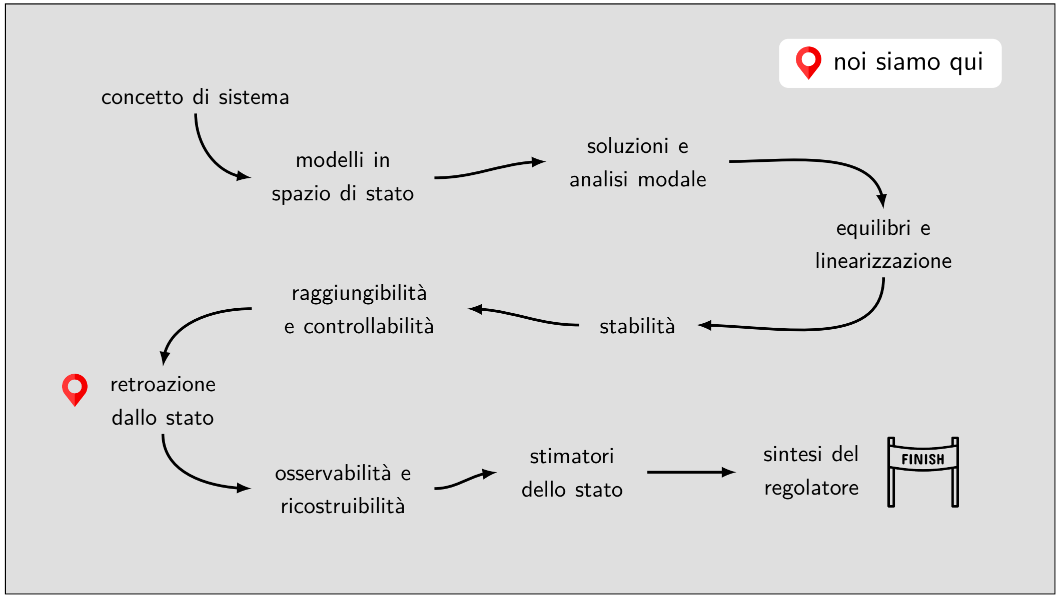
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Proprietà di sistemi lineari retroazionati dallo stato
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m = 1$
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato: caso $m > 1$
- ▷ Stabilizzabilità

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T?

$$F' = T^{-1}FT, \quad G' = T^{-1}G, \quad K' = KT$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}+G_1K_1 & F_{12}+G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

Controllo in retroazione per sistemi a singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$
$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

Quando è possibile assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati?

Teorema: Per ogni polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \ \ p_i \in \mathbb{R},$$

esiste una matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tale che $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda)$ se e solo se il sistema Σ è raggiungibile.

Allocazione degli autovalori ($m = 1$): metodo diretto

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \ \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F + gK \text{ degli autovalori desiderati?}}$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 =$ polinomio con autovalori desiderati

$$\boxed{\text{Risolvere } \Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda) \text{ con incognita } K}$$

$$\Downarrow$$

Sistema di equazioni lineari con incognite $k_1, \ldots, k_n$, $K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $F + gK$ a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.
2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora possiamo cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di F_{11} (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).
3. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) tutti i modi del sistema retroazionato convergono a zero in tempo finito. Il controllore in questo caso viene detto controllore dead-beat!
4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo, ma in questo caso non si possono avere controllori dead-beat.

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima per il caso singolo ingresso ($m = 1$)!

Problema: Anche se il sistema Σ è raggiungibile, non è detto che lo sia usando un singolo ingresso !!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m > 1$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso,
è possibile assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati?

Idea: Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.'d)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Retroazione K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = 1/2$, $\nu_1 = 2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1.

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M. Tuttavia, generando una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1)!
2. Un approccio alternativo è usare il metodo diretto (cioè risolvere $\Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$ con incognite gli elementi di K) anche nel caso $m > 1$. In questo caso, però il sistema di equazioni da risolvere potrebbe essere non lineare!
3. L'approccio tramite lemma di Heymann ci permette di allocare gli autovalori della matrice $F + GK$ a nostro piacimento anche per $m > 1$, ma ha delle limitazioni. Ad esempio, usando un singolo ingresso non si possono ottenere controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$. Usando più ingressi invece è possibile costruire controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$! Tramite tecniche di controllo più avanzate che sfruttano tutti gli ingressi di controllo si possono ottenere quindi prestazioni di controllo migliori.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno modulo < 1.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di F hanno parte reale < 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.