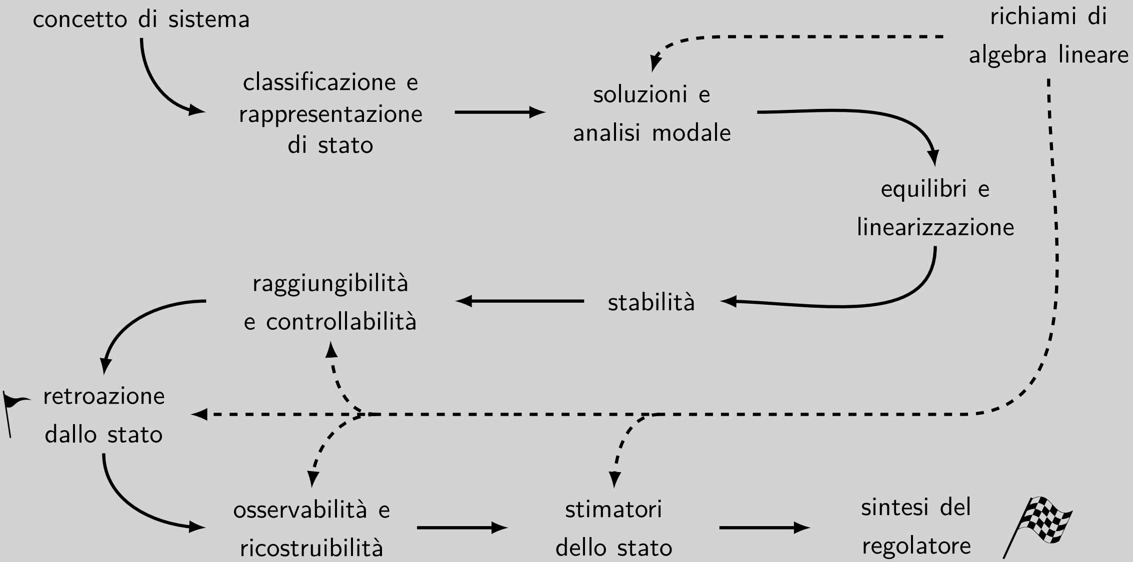
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

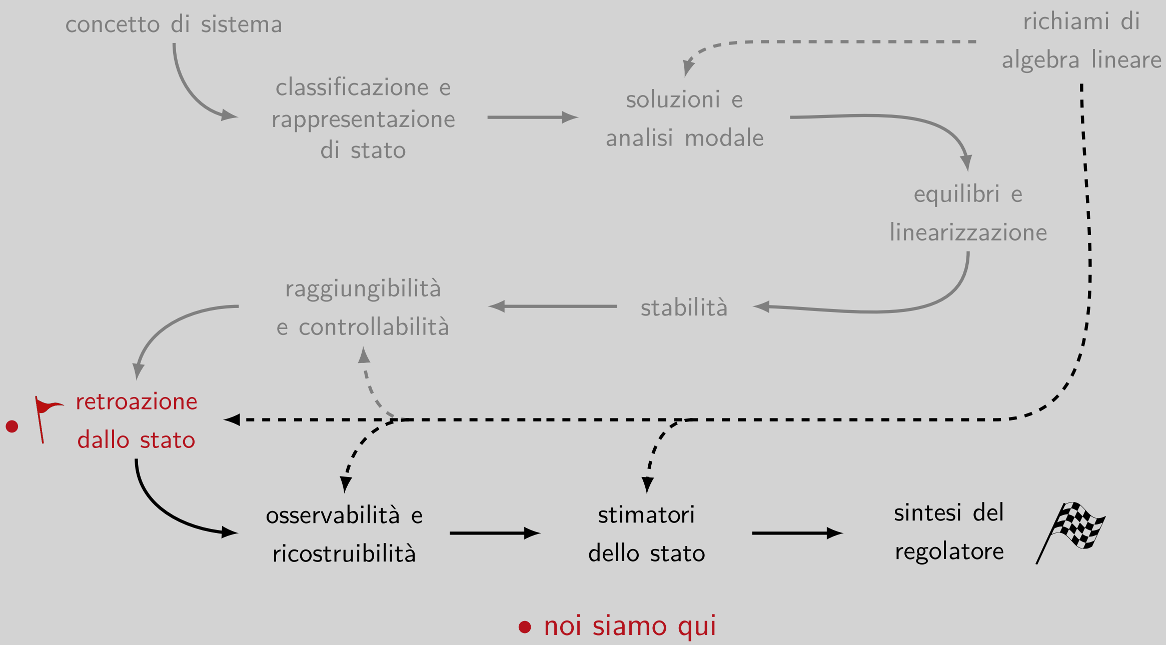
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

In queste lezioni

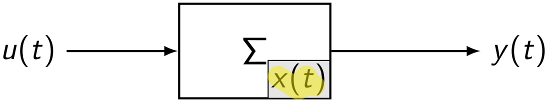
- ▷ Il problema del controllo
- ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
- ▷ Forma canonica di controllo
- ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
- ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
- ▷ Stabilizzabilità

In queste lezioni

- Il problema del controllo
    - Controllo in retroazione: setup e proprietà
        - Forma canonica di controllo
            - Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
                - Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
                    - Stabilizzabilità

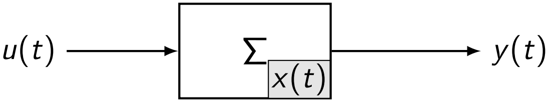
Il problema del controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Il problema del controllo

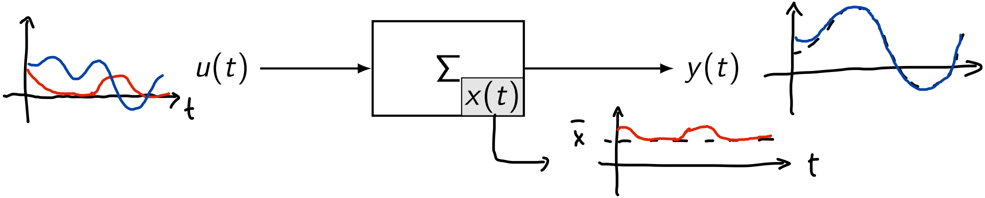
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Controllo $=$ manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso $u(t)$

Problemi di controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

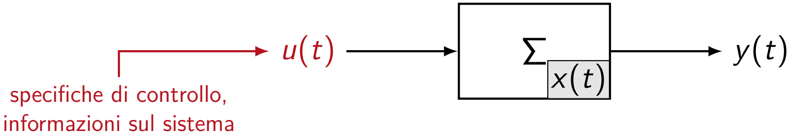


Problema di regolazione:
stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

Problema di asservimento (tracking):
inseguire un andamento desiderato dell'uscita

Controllo in “catena aperta” o open-loop

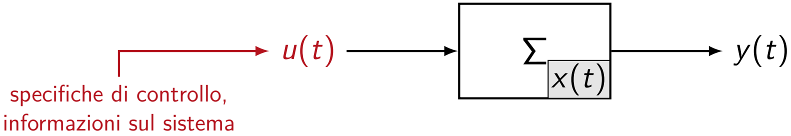
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

Controllo in "catena aperta" o open-loop

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

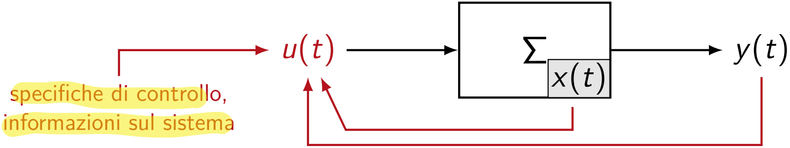


legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

approccio semplice, ma non ideale se il sistema
è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!

Controllo in retroazione o feedback

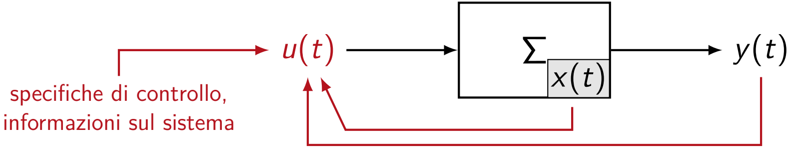
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

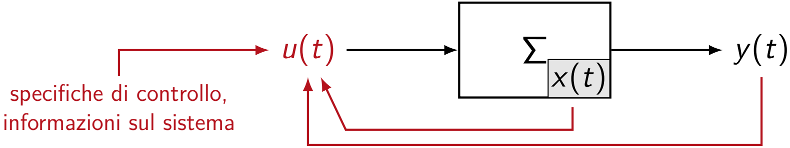


legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

approccio più complesso (richiede sensori di misura),
ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!

Controllo in retroazione o feedback

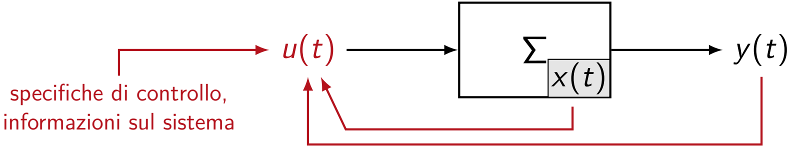
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



1. Retroazione statica
   - dallo stato: $u(t) = f(x(t))$ (allo stesso istante t!)
   - dall'uscita: $u(t) = f(y(t))$ (allo stesso istante t!)

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



2. Retroazione dinamica

dallo stato: $u(t) = f(x(\tau))$, $\tau \in [t_0, t]$ $t_0 < t$

dall'uscita: $u(t) = f(y(\tau))$, $\tau \in [t_0, t]$ $t_0 < t$

In questo corso

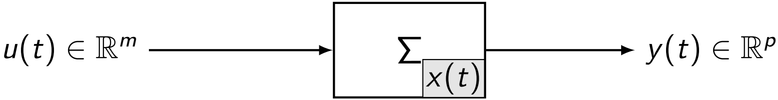
Problemi di regolazione per sistemi lineari
in catena aperta *e*
con ***retroazione statica dallo stato/uscita***

In queste lezioni

- Il problema del controllo
- Controllo in retroazione: setup e proprietà
- Forma canonica di controllo
- Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
- Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
- Stabilizzabilità

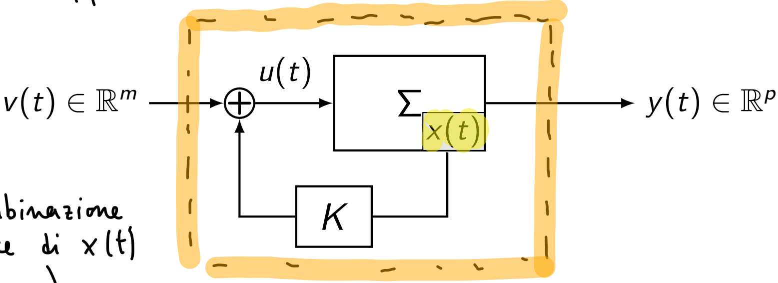
Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t) \; + \left(J\,u(t) \right)$$



Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\
y(t) &= Hx(t)
\end{aligned}
$$

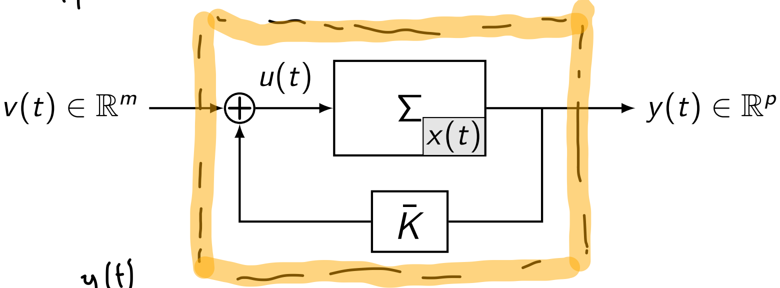


combinazione lineare di $x(t)$

$u(t) = Kx(t) + v(t), \; K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **retroazione statica dallo stato**

Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$\begin{cases} x(t+1) = \overbrace{(F + G\bar{K}H)}^{\bar{F}}x(t) + Gv(t), & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$



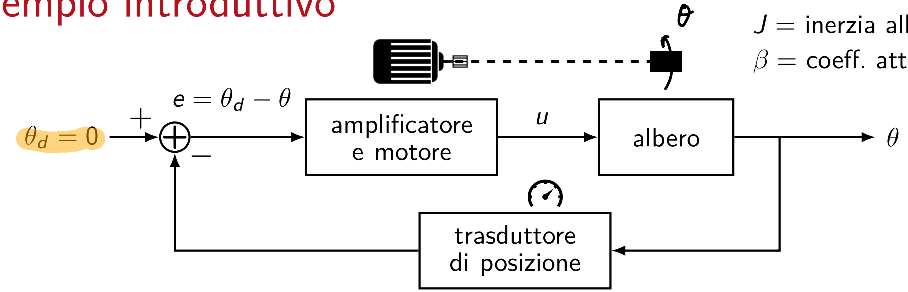
$u(t) = \bar{K}\overbrace{Hx(t)}^{y(t)} + v(t)$, $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ **retroazione statica dall'uscita**

Esempio introduttivo

extra

$J =$ inerzia albero

$\beta =$ coeff. attrito viscoso



Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = ke, \; k \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

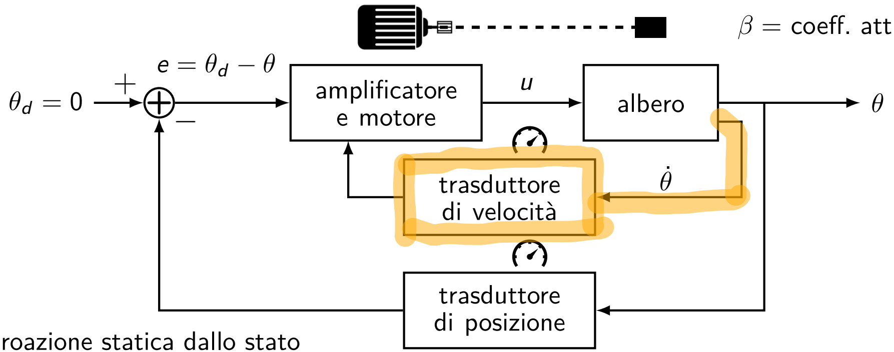
$$y = \theta \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Esempio introduttivo

extra

$J =$ inerzia albero

$\beta =$ coeff. attrito viscoso



Retroazione statica dallo stato

$$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u$$

$$u = k_1 e + k_2\dot\theta, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \dot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}$$

$$y = \theta \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

In queste lezioni

Problemi di regolazione per sistemi lineari
con ***retroazione statica dallo stato***

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

extra

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base } T\text{?}}$

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

extra

$$\Sigma^{(K)} : \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base } T?}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT, \quad \bar{K} = KT$$

Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$X_R(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di Σ

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$X_R^{(K)}(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di $\Sigma^{(K)}$

Teorema: $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$, per ogni scelta della matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$X_R(t) = \text{spazio di raggiungibilità in } t \text{ passi di } \Sigma$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$$X_R^{(K)}(t) = \text{spazio di raggiungibilità in } t \text{ passi di } \Sigma^{(K)}$$

Teorema: $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$, per ogni scelta della matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \Sigma^{(K)} \text{ raggiungibile}}$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

extra

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

extra

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}+G_1K_1 & F_{12}+G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

In queste lezioni

- Il problema del controllo
  - Controllo in retroazione: setup e proprietà
    - Forma canonica di controllo
      - Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
        - Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
          - Stabilizzabilità

Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

vettore

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + \underset{\uparrow}{g}u(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

$$\implies \text{rank}\left(\begin{bmatrix} g & Fg & F^2 g & \cdots & F^{n-1}g \end{bmatrix}\right) = n$$

$$\implies \{g,\ Fg,\ F^2g,\ \dots,\ F^{n-1}g\} \text{ base di } \mathbb{R}^n$$

base ciclica di $\mathbb{R}^n$

Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Consideriamo il cambio di base $T = \mathcal{R}$

Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

extra

$$\Sigma:\quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Consideriamo il cambio di base $T = \mathcal{R}$

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \; (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Con un ulteriore cambio di base Q arriviamo alla forma canonica di controllo

$$F_c = Q^{-1}\bar{F}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g_c = Q^{-1}\bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo: osservazioni

$$\Sigma\colon \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

$\Rightarrow$

1. Σ raggiungibile $\Longleftrightarrow$ Σ può essere portato in forma canonica di controllo.

$\Leftarrow$

$$R_c = \begin{bmatrix} g_c & F_c g_c & \cdots & F_c^{n-1} g_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \iddots & * \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Forma canonica di controllo: osservazioni

$$\Sigma\colon \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

1. Σ raggiungibile $\iff$ Σ può essere portato in forma canonica di controllo.

2. Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base $T_c \triangleq TQ$ ma solo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$.

Forma canonica di controllo: osservazioni

$$\Sigma\colon\quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}\ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

1. Σ raggiungibile $\iff$ Σ può essere portato in forma canonica di controllo.

2. Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base $T_c \triangleq TQ$ ma solo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$.

3. Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_c$ sono le matrici di raggiungibilità del sistema di partenza e del sistema in forma canonica di controllo allora $T_c = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$.

$$R = T_c R_c \Rightarrow T_c = R R_c^{-1}$$

In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
  - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
    - ▷ Forma canonica di controllo
      - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
        - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
          - ▷ Stabilizzabilità

Allocazione autovalori ($m = 1$)

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati ?}}$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati ?}}$

$\Sigma^{(K)}$ raggiungibile $\implies$ trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo !

$$F_c = T_c^{-1} F T_c, \quad g_c = T_c^{-1} g, \quad K_c = K T_c = \begin{bmatrix} k_{1,c} & \cdots & k_{n,c} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati ?

$\Sigma^{(K)}$ raggiungibile $\implies$ trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo !

$$F_c = T_c^{-1}FT, \quad g_c = T_c^{-1}g, \quad K_c = KT_c = \begin{bmatrix} k_{1,c} & \cdots & k_{n,c} \end{bmatrix}$$

$$F_c + g_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{1,c} & -\alpha_1 + k_{2,c} & -\alpha_2 + k_{3,c} & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = \text{polinomio con autovalori desiderati}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Delta_{F_c+g_cK_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = \text{polinomio con autovalori desiderati}$$

1. Siano $k_{1,c}^* \triangleq \alpha_0 - p_0, \ldots, k_{n,c}^* \triangleq \alpha_{n-1} - p_{n-1}$
2. Sia $K_c^* \triangleq \begin{bmatrix} k_{1,c}^* & \cdots & k_{n,c}^* \end{bmatrix}$
3. $K^* \triangleq K_c^* T_c^{-1}$ = matrice di retroazione desiderata !

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).

sistemi a tempo discreto: $p(\lambda) = \lambda^n$

2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)**!

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).

2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)** !

3. Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Mentre, Il cambio di base T_c^{-1} per ottenere K^* si può calcolare come $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1}$.

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).

2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)** !

3. Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Mentre, Il cambio di base T_c^{-1} per ottenere K^* si può calcolare come $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1}$.

4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo.

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$): metodo alternativo

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 =$ polinomio con autovalori desiderati

$$\boxed{\text{Risolvere } \Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda) \text{ con incognita } K}$$

$$\Downarrow$$

Sistema di equazioni lineari con incognite $k_1, \ldots, k_n$, $K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$ *!*

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

extra

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Che forma ha la f.d.t. } W(z) \text{ di } \Sigma^{(K)} \text{ ?}}$$

Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

extra

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+gK)x(t)+gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t. $W(z)$ di $\Sigma^{(K)}$?

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI-F-gK)^{-1}g = H_c(zI-F_c-g_cK_c)^{-1}g_c \\ &= \frac{\beta_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\beta_1 z+\beta_0}{z^n+(\alpha_{n-1}-k_{n,c})z^n+\cdots+(\alpha_1-k_{2,c})z+(\alpha_0-k_{1,c})} \end{aligned}$$

La funzione modifica solo i poli della funzione di trasferimento !

In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
- ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
- ▷ Forma canonica di controllo
- ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
- ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
- ▷ Stabilizzabilità

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati ?

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F + GK \text{ degli autovalori desiderati ?}}$

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \underline{F + \overbrace{g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m}^{g_i k_i}}$$

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F+GK \text{ degli autovalori desiderati ?}}$

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima ($m = 1$)!

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F+GK \text{ degli autovalori desiderati ?}}$

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima ($m = 1$)!

Problema: Il sistema potrebbe **non** essere raggiungibile da un singolo ingresso anche se Σ raggiungibile !!

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma\colon \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\Sigma^{(K)}\colon \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso !!

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso !!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1.

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

extra

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M.

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

extra

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M.

2. L'approccio appena visto è piuttosto intuitivo ma ha delle limitazioni.

Ad esempio, usando un singolo ingresso si può ottenere un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi non inferiore a n. Con più ingressi invece esistono casi in cui è possibile costruire un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi inferiore a n!

Quindi, usando tecniche più avanzate (che sfruttano la cosiddetta forma canonica di controllo multivariabile) si possono ottenere prestazioni di controllo migliori.

In queste lezioni

- Il problema del controllo
    - Controllo in retroazione: setup e proprietà
        - Forma canonica di controllo
            - Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
                - Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
                    - Stabilizzabilità

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con modulo minore di 1.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile in tempo finito se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile in tempo finito se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile in tempo finito.
2. Σ ammette un DBC.
3. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori nulli.
4. Σ è controllabile (a zero).
5. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $z \neq 0$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con parte reale minore di 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Esempio

extra

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esempio

extra

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Il sistema è stabilizzabile se $\alpha > 0$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

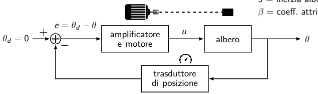
✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

back

Esempio introduttivo

extra

J = inerzia albero
β = coeff. attrito viscoso

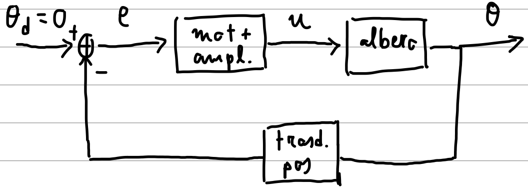


Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x$$

$$u = ke,\ k \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$y = \theta \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$



u = coppia erogata

J = inerzia

β = coeff. attrito

<u>Assunzione:</u> Costante elettrica e del trasduttore sono trascurabili rispetto alla costante meccanica

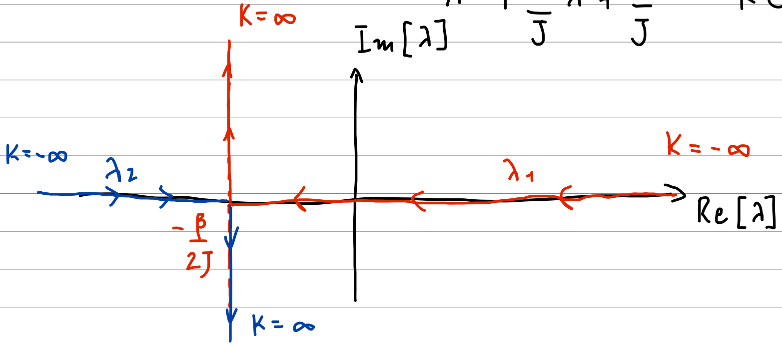
$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u \qquad x_1 = \theta \qquad x_2 = \dot{\theta} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad u = ke = k(\theta_d - \theta) \overset{!}{=} -k\,x_1$$

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}}^{F} x \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K}{J} & \lambda + \frac{\beta}{J} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{\beta}{J}\right) + \frac{K}{J}$$

$$= \lambda^2 + \frac{\beta}{J}\lambda + \frac{K}{J} \qquad K \in \mathbb{R}$$



$\max \mathrm{Re}[\lambda_i] \geq -\frac{\beta}{2J}$

$e^{-\frac{\beta}{2J}t}$

↳ modo dominante
nella condizione più favorevole

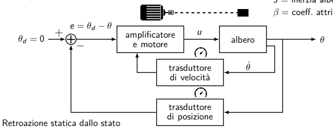
Limiti alla prontezza del sistema retroazionato!

back

Esempio introduttivo

extra

J = inerzia albero
β = coeff. attrito viscoso



Retroazione statica dallo stato

$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u$

$u = k_1 e + k_2\dot\theta,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \implies \dot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}$

$y = \theta \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$

$$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}$$

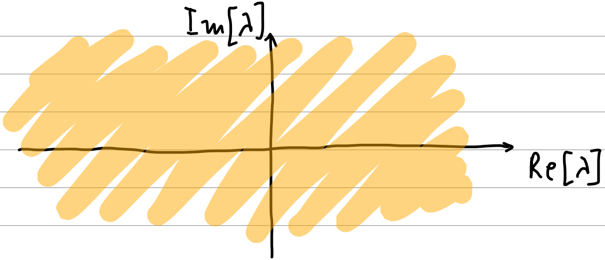
$$u = k_1 e + k_2\dot\theta = -k_1 x_1 + k_2 x_2 \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$\dot x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix}}_{F} x \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_1}{J} & \lambda + \frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{\beta - k_2}{J}\right) + \frac{k_1}{J}$$

$$= \lambda^2 + \frac{\beta - k_2}{J}\lambda + \frac{k_1}{J}$$

back



Possiamo allocare gli autovalori del sistema retroazionato a nostro piacimento!

Non abbiamo nessun limite alla prontezza del sistema!

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

extra

$$\Sigma^{(K)}: \begin{array}{l} x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array}$$

$\boxed{\text{Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base } T\text{?}}$

back

$$x(t+1) = (F + Gk)\,x(t) + G\,v(t)$$
$$y(t) = H\,x(t)$$

$$z = T^{-1}x \qquad \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{K}\ ?$$
$$\Downarrow$$
$$x = Tz$$

$$\begin{cases} Tz(t+1) = FTz(t) + GKTz(t) + Gv(t) \\ y(t) = HTz(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(t+1) = \overbrace{T^{-1}FT}^{\bar{F}}z(t) + \overbrace{T^{-1}G}^{\bar{G}}\,\overbrace{KT}^{\bar{K}}z(t) + Gv(t) \\ y(t) = \underbrace{HT}_{\bar{H}}z(t) \end{cases}$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

extra

$$\Sigma^{(K)}: \begin{aligned} x(t+1) &= (F+GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

back

$$\Sigma^{(K)}: \begin{aligned} x(t+1) &= (F+GK)\,x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= H\,x(t) \end{aligned}$$

$T =$ cambio di base di Kalman

$$F_K = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G_K = T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_K = KT = [\underbrace{K_1}_{k} \ \underbrace{K_2}_{n-k}]$$

$$F_K + G_K K_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1K_1 & G_1K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} + G_1 K_1 & F_{12} + G_1 K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

parte non ragg.

non è influenzata dalla retroazione!

back

Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

extra

Σ: $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$, $g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ($m = 1$ = singolo ingresso)

Consideriamo il cambio di base $T = \mathcal{R}$

back

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$$

$$T = \mathcal{R} = \begin{bmatrix} g & Fg & F^2 g & \cdots & F^{n-1} g \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = T^{-1} F T \qquad \bar{g} = T^{-1} g$$

Sia $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$ (vettore della base canonica)

$$\bar{F} e_1 = T^{-1} F T e_1 = T^{-1} F g = \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_2 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} e_2 = T^{-1} F T e_2 = T^{-1} F F g = T^{-1} F^2 g = \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_3 = e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\bar{F} e_{n-1} = T^{-1} F T e_{n-1} = T^{-1} F F^{n-2} g = T^{-1} F^{n-1} g = \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

back

$$\bar{F} e_n = T^{-1} F T e_n = T^{-1} F F^{n-1} g = T^{-1} F^n g \quad (*)$$

Cayley-Hamilton: $\Delta_F(F) = 0$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$$

$$= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$F^n + \alpha_{n-1} F^{n-1} + \dots + \alpha_1 F + \alpha_0 I = 0$$

$$F^n = -\alpha_{n-1} F^{n-1} + \dots - \alpha_1 F - \alpha_0 I$$

$$(*)\quad \bar{F} e_n = T^{-1} F^n g = T^{-1}\left(-\alpha_{n-1} F^{n-1} + \cdots - \alpha_1 F - \alpha_0 I\right) g$$

$$= -\alpha_{n-1} T^{-1} F^{n-1} g - \alpha_{n-2} T^{-1} F^{n-2} g - \cdots - \alpha_1 T^{-1} F g - \alpha_0 T^{-1} g$$

$$= -\alpha_{n-1} \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_n - \alpha_{n-2} \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_{n-1} - \cdots - \alpha_1 \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_2 - \alpha_0 \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_1$$

$$= -\alpha_{n-1} e_n - \alpha_{n-2} e_{n-1} - \cdots - \alpha_1 e_2 - \alpha_0 e_1$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha_0 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} e_2 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & * \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{g} = T^{-1} g = \cancel{T^{-1}} \cancel{T} e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

extra

Σ: $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$, $g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$\Sigma^{(K)}$: $x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$

$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F+gK \text{ degli autovalori desiderati ?}}$

back

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

T_c = cambio base forma canonica controllo

$$F_c = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad K_c = KT = [k_{1,c} \cdots k_{n,c}]$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ k_{1,c} & k_{2,c} \cdots & k_{n,c} \end{bmatrix}$$

back

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ -\alpha_0 + k_{1,c} & -\alpha_1 + k_{2,c} & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F_c + g_c k_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + (\alpha_{n-2} - k_{n-1,c})\lambda^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + p_1\lambda + p_0$$

$$\begin{cases} \alpha_{n-1} - k_{n,c} = p_{n-1} \\ \alpha_{n-2} - k_{n-1,c} = p_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_1 - k_{2,c} = p_1 \\ \alpha_0 - k_{1,c} = p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k^*_{n,c} = \alpha_{n-1} - p_{n-1} \\ \vdots \\ k^*_{2,c} = \alpha_1 - p_1 \\ k^*_{1,c} = \alpha_0 - p_0 \end{cases}$$

$$k^*_c = \left[k^*_{1,c} \; \cdots \; k^*_{n,c} \right]$$

$$k^*_c = K T_c \Rightarrow K = k^*_c T_c^{-1} \qquad T_c = R R_c^{-1} \Rightarrow T_c^{-1} = R_c R^{-1}$$

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

back

$$x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{F} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{g} u(t)$$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) = \lambda^3$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = -1$$

back

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F_c + g_c \underset{\downarrow}{K_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1+k_{1,c} & 1+k_{2,c} & 1+k_{3,c} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{1,c} & k_{2,c} & k_{3,c} \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 \qquad p_2 = 0, \quad p_1 = 0, \quad p_0 = 0$$

back

$$\begin{cases} -1 + K_{1,c} = 0 \\ 1 + K_{2,c} = 0 \\ 1 + K_{3,c} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k^*_{1,c} = 1 \\ k^*_{2,c} = -1 \\ k^*_{3,c} = -1 \end{cases}$$

$$K^*_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K^* = K^*_c T_c^{-1} = K^*_c R_c R^{-1} \qquad (*)$$

$$R_c = \begin{bmatrix} g_c & F_c g_c & F_c^2 g_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} g & Fg & F^2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad K^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\det(\lambda I - F - gK) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -2 - k_2 & -k_3 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -k_1 & -1 - k_2 & \lambda - k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 1 - k_1)(\lambda - k_3) - (2 + k_2)k_1 - \lambda k_1 k_3 - (\lambda - 1 - k_1)(1 + k_2)$$

$$= \lambda\Big(\lambda^2 - \lambda(1+k_1+k_3) + (1+k_1)k_3 - 2k_1 - k_1k_2$$

$$- \lambda k_1 k_3 - \lambda(1+k_2) + (1+k_1)(1+k_2)$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(1+k_1+k_3) + \lambda\big(k_3 + \cancel{k_1}k_3 - \cancel{k_1}k_3 - 1 - k_2\big)$$

$$+ \big(-2k_1 - \cancel{k_1}k_2 + 1 + \cancel{k_1}k_2 + k_1 + k_2\big)$$

$$\overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} -(1+k_1+k_3) = 0 \\ k_3 - 1 - k_2 = 0 \\ -k_1 + k_2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + k_1 + k_1 = 0 \implies k_1 = -1/2 \\ k_3 = 1 + k_2 = k_1 \implies k_3 = -1/2 \\ k_2 = k_1 - 1 \implies k_2 = -3/2 \end{cases}$$

back

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

extra

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t. $W(z)$ di $\Sigma^{(K)}$?

back

Σ raggiungibile

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + g u(t) \\ y(t) = H x(t) \qquad H \in \mathbb{R}^{1\times n} \end{cases}$$

SISO

$$H_c = H T_c = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1}] \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W(z) = H(zI-F)^{-1} g = H_c (zI - F_c)^{-1} g_c$$

$$= H_c \frac{\operatorname{adj}(zI-F_c)}{\det(zI-F_c)} g_c$$

$$\operatorname{adj}(zI-F_c)\, g_c \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\beta_{n-1} z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

poli di $W(z) \subseteq$ autovalori di F

$$\Sigma^{(K)}: \begin{cases} x(t+1) = (F + gK)\, x(t) + g\, v(t) \\ y(t) = H\, x(t) \end{cases}$$

$$W^{(K)}(z) = H\,(zI - F - gK)^{-1} g = H_c\,(zI - F_c - g_c K_c)^{-1} g_c$$

$$= H_c\, \frac{\operatorname{adj}(zI - F_c - g_c K_c)}{\det(zI - F_c - g_c K_c)}\, g_c$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\beta_{n-1} z^{n-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + (\alpha_{n-1} - K_{n,c})\, z^{n-1} + \dots + (\alpha_0 - K_{1,c})}$$

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} u(t)$$

Σ ragg.? $\quad R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ rank $R = 2$ $\quad \Sigma$ ragg.

(F, g_1) ragg.? $\quad R^{(1)} = [g_1 \;\; Fg_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ non ragg.

(F, g_2) ragg.? $\quad R^{(2)} = [g_2 \;\; Fg_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ non ragg.

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} u(t)$$

$$p(\lambda) = \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1/4$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (F + GM, g_1) \text{ è ragg.?}$$

$$\downarrow$$

$$F + GM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = [\, g_1 \;\; (F+GM) g_1 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ragg.!}$$

$$K = [\, k_1 \;\; k_2 \;\; k_3 \,]$$

$$\Delta_{F+GM+g_1K}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GM - g_1 K)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda - k_1 & -k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - k_1)\lambda - k_2$$

$$= \lambda^2 - \lambda k_1 - k_2$$

$$\overset{!}{=} \lambda - \lambda + \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1/4 \end{cases}$$

$$\bar{K} = M + \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice di retroazione "complessiva"

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M.

back

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}^k$$

Esempio

extra

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

back

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \alpha \\ \hline 0 & -\alpha \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] u(t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Il sistema è in forma di Kalman!

$F_{11} = 0, \quad G_1 = [1 \;\; 1]$

$F_{22} = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha > 0$ il sistema è stabilizzabile