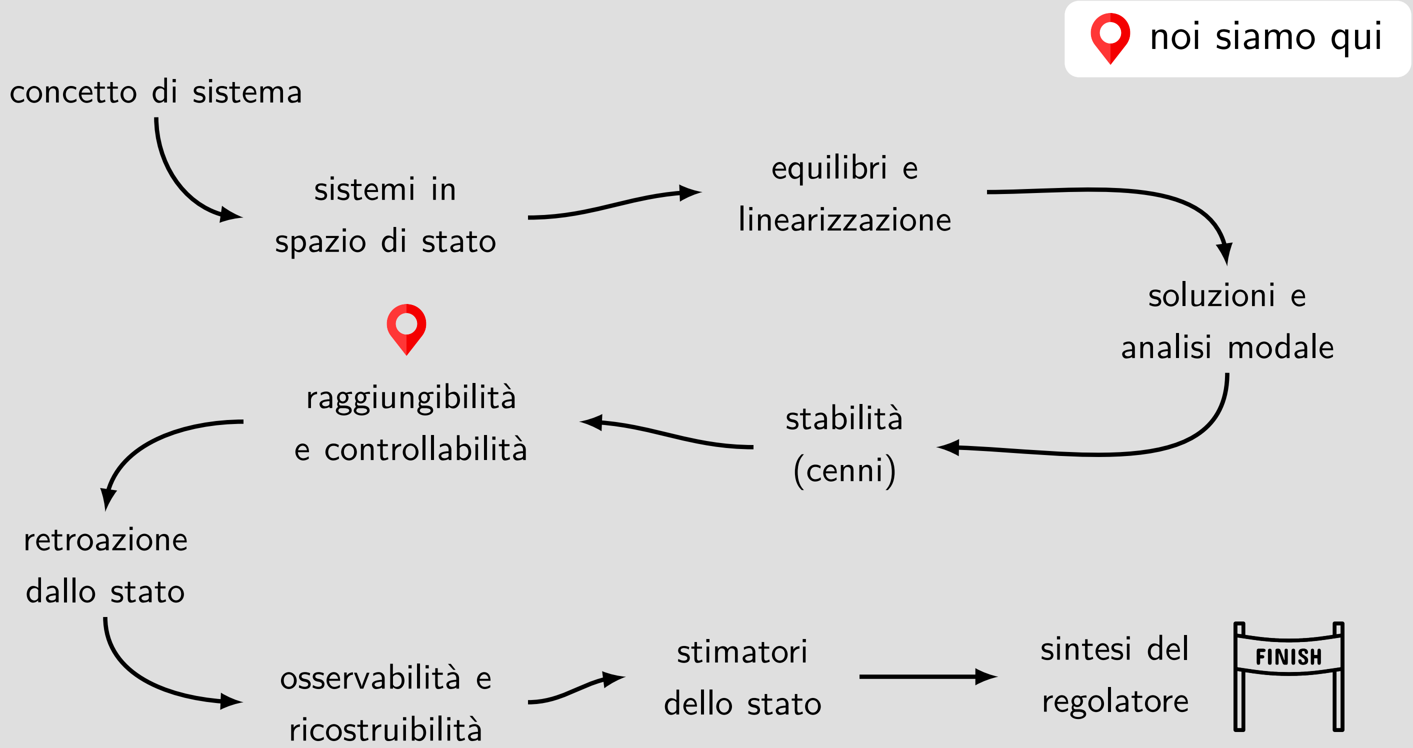
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Controllabilità di sistemi lineari a t.d.
- Controllabilità e forma di Kalman
- Test PBH di controllabilità

In questa lezione

- Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- Controllabilità di sistemi lineari a t.c.

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\quad\Sigma\quad} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{ev. forzata}}$$

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

spazio infinito-dim.!

$\in \mathcal{U}_{[0,t]}$ = spazio delle funzioni m-dim. integrabili nell'intervallo $[0,t]$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau)\, d\tau$$

$X_R(t)$?

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità del rango

$X_R(t) =$ spazio raggiungibile al tempo t

$X_R =$ (massimo) spazio raggiungibile (al variare di $t > 0$)

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathcal{U}_{[0,t]} \text{ t.c. } x = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau \right\}$$

Criterio di raggiungibilità del rango

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n =$ matrice di raggiungibilità del sistema (Matlab® `ctrb(sys)`)

$\stackrel{!}{=} [G \;\; FG \;\; \cdots \;\; F^{n-1}G]$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

Criterio di raggiungibilità del rango

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{\circledR}\ \texttt{ctrb(sys)})$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$!!

Più in generale vale $X_R(t) = X_R = \operatorname{im} \mathcal{R} \quad \forall t > 0$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$

2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \;\; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \;\; G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\text{im}(G)$

2. Forma canonica di Kalman:

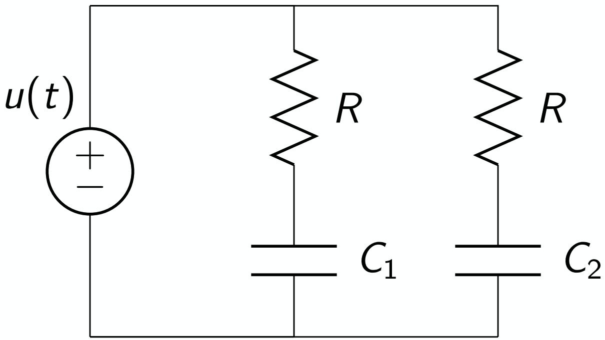
$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \;\; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \;\; G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{rank}\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = n, \quad \underbrace{\forall z \in \mathbb{C}}_{\forall z \in \lambda(F)}.$$

autovalori di F

Esempio



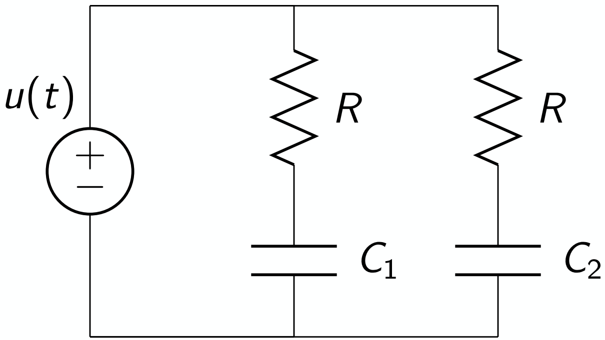
$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

note

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile !

note

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\; x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$x_c(t)$?

$\boxed{\text{Insieme di stati } x_0 \text{ controllabili al tempo } t \text{ allo stato } x(t) = 0?}$

$\boxed{\text{Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati } x_0 \in \mathbb{R}^n?}$

Controllabilità = raggiungibilità

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

note

Controllabilità = raggiungibilità

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R$$

$$\boxed{X_C = X_C(t) = X_R}$$

controllabilità = raggiungibilità !!

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

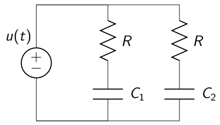
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$

Σ raggiungibile ?

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{G} u \qquad x = \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \end{bmatrix}$$

$\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile?

$$\mathcal{R} = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2 C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2 C_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{R} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2 C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2 C_2^2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{R^3 C_1 C_2^2} + \frac{1}{R^3 C_1^2 C_2}$$

$$= \frac{1}{R^3 C_1 C_2} \left(-\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right)$$

$$= \frac{1}{R^3 C_1 C_2} \left(\frac{C_2 - C_1}{C_1 C_2} \right) \qquad R, C_1, C_2 > 0$$

$$\det \mathcal{R} \begin{cases} = 0 & C_1 = C_2 \longrightarrow \Sigma \text{ non ragg.} \\ \neq 0 & C_1 \neq C_2 \longrightarrow \Sigma \text{ ragg.} \end{cases}$$

Controllabilità = raggiungibilità

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$x_0 \in X_C(t) \iff \exists\, u \in \mathcal{U}_{[0,t]} \text{ t.c. } \underbrace{0 = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau}_{e^{Ft}x_0 = -\int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau}$$

$$\iff e^{Ft}x_0 \in X_R(t) = X_R \quad (t>0)$$

$$\iff x_0 \in e^{-Ft}X_R = \{ v \in \mathbb{R}^n : \exists\, w \in X_R \;\; v = e^{-Ft} w \}$$

$\iff x_0 \in X_R$ perché $e^{-Ft}X_R = X_R$ essendo:

1) X_R è F-invariante (e quindi e^{-Ft} invariante)

2) e^{-Ft} è invertibile $\to \dim[e^{-Ft}X_R] = \dim[X_R]$

X_R è F-invariante: $\forall v \in X_R$, $Fv \in X_R$

$$\Rightarrow \forall v \in X_R,\ \forall k \text{ intero},\ F^k v \in X_R$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \forall v \in X_R,\ e^{-Ft} v \in X_R$$

$x_0 \in X_C \iff x_0 \in X_R \longrightarrow$ $\boxed{\text{RAGGIUNGIBILITÀ = CONTROLLABILITÀ}}$