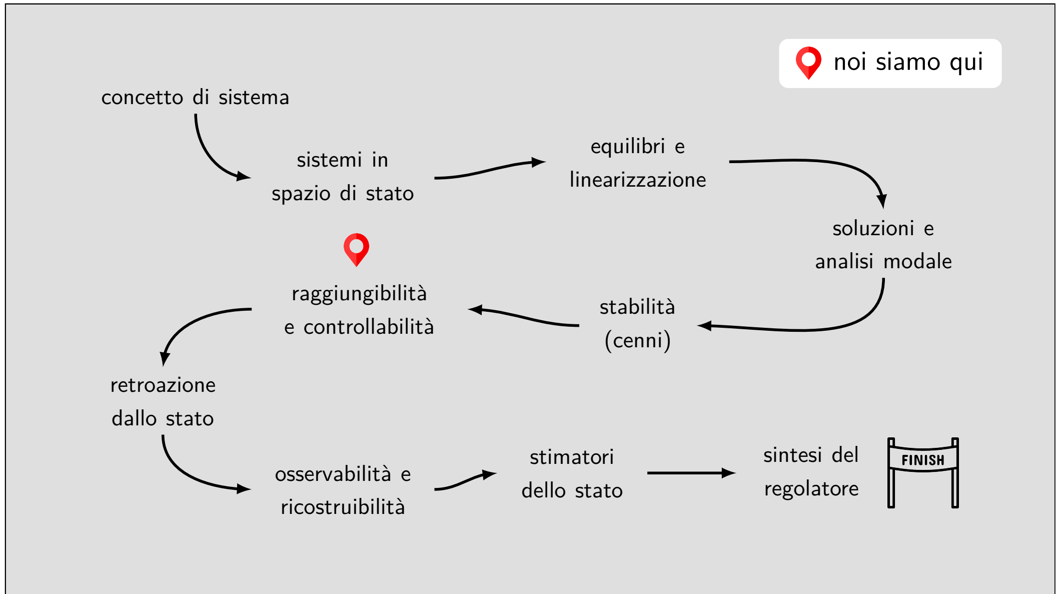
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità del rango

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{\circledR}\ \texttt{ctrb(sys)})$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$!!

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\operatorname{im}(G)$

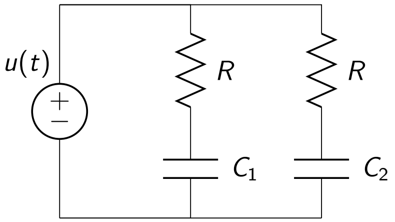
2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \; G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{rank}\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile !

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Controllabilità = raggiungibilità

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R$$

$$\boxed{X_C = X_C(t) = X_R}$$

controllabilità = raggiungibilità !!