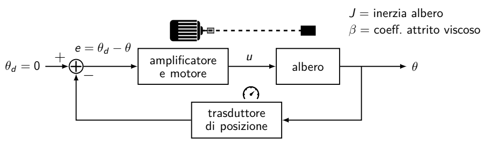
Esempio: retroazione dallo stato



Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u \qquad u = ke,\ k \in \mathbb{R} \qquad y = \theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$\theta(t)$ = posizione angolare dell'albero

$\theta_d = 0$, J = momento d'inerzia dell'albero
β = coeff. di attrito viscoso

Equazioni dinamiche:

<u>Assunzione</u>: Le costanti di tempo del motore e del trasduttore di posizione siano trascurabili rispetto alla costante di tempo dell'albero meccanico

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u = -\beta\dot{\theta} - K\theta \\ u = Ke = K(\theta_d - \theta) = -K\theta \\ y = \theta \end{cases}$$

Rappresentazione in spazio di stato: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{\beta}{J}\dot{\theta} - \frac{K}{J}\theta = -\frac{\beta}{J}x_2 - \frac{K}{J}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}}^{F} x \qquad K \in \mathbb{R} \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

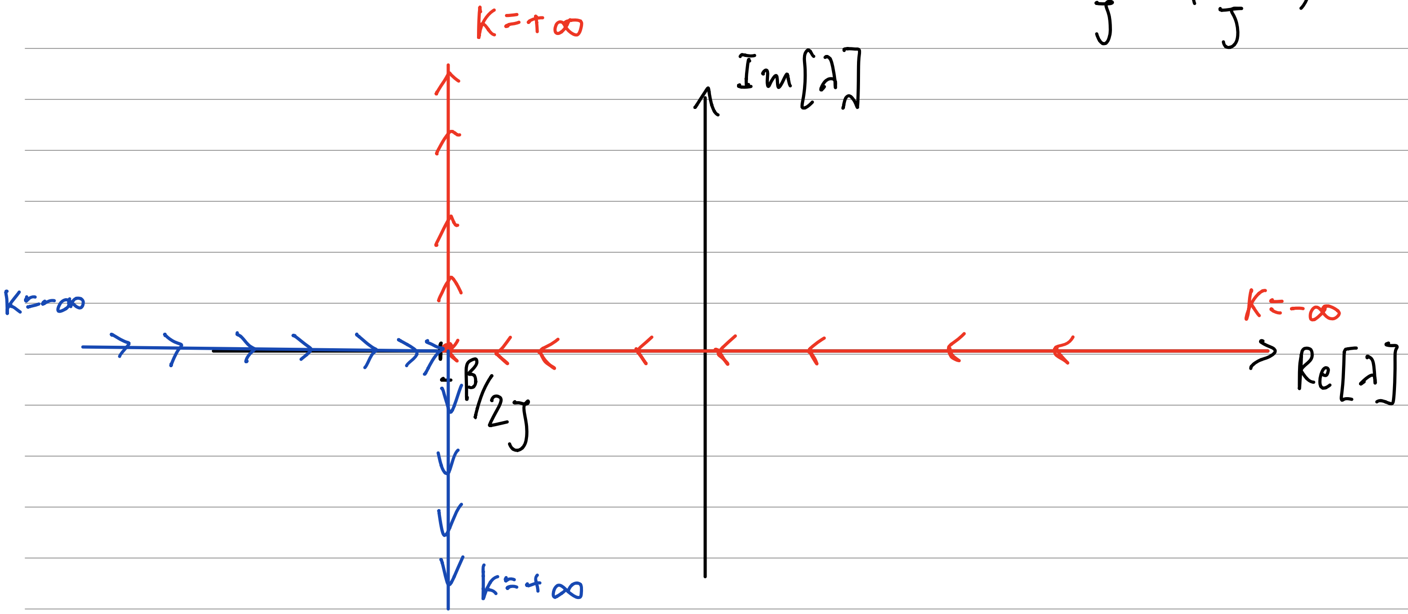
Come scegliere k in modo che $\theta(t)$ tenda $\theta_d = 0$ il più velocemente possibile?

Come scegliere k in modo che $\theta(t)$ tenda $\theta_d = 0$ il più velocemente possibile?

Come scegliere k in modo da avere $\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}]$ la più negativa possibile?
autovalori di F

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{J} & \lambda + \frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{\beta}{J}\right) + \frac{k}{J}$$

$$= \lambda^2 + \frac{\beta}{J}\lambda + \frac{k}{J}, \quad k \in \mathbb{R}$$

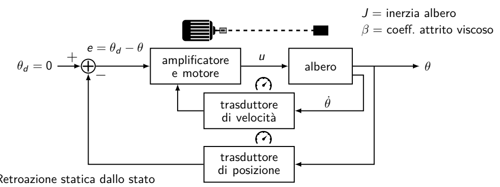


$\forall k \in \mathbb{R}: \max\limits_{i=1,2} \mathrm{Re}[\lambda_i] \geq -\frac{\beta}{2J}$ $\longrightarrow$ Σ retroazionato avrà sempre un modo $e^{\alpha t}$, $\alpha \geq -\frac{\beta}{2J}$

$\longrightarrow$ i modi elementari non potranno mai convergere a 0 più rapidamente di $e^{-\beta/2J\, t}$

$\longrightarrow$ limiti alla prontezza del sistema di controllo

Esempio: retroazione dall'uscita



Retroazione statica dallo stato

$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u$

$u = k_1 e + k_2\dot\theta,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$y = \theta$

$$\Longrightarrow \quad \dot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta-k_2}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

note

$\theta(t)$ = posizione angolare dell'albero

Equazione dinamica:

$$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u, \quad u = K_1 \underset{\theta_d - \theta}{\underset{\uparrow}{e}} + K_2\dot\theta = -k_1\theta + k_2\dot\theta$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Rappresentazione in spazio di stato: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot\theta$

$$\begin{cases} \dot x_1 = \dot\theta = x_2 \\ \dot x_2 = \ddot\theta = -\frac{\beta}{J}\dot\theta - \frac{k_1}{J}\theta + \frac{k_2}{J}\dot\theta = -\frac{k_1}{J}x_1 - \frac{\beta-k_2}{J}x_2 \\ y = \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x = \begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta-k_2}{J} \end{bmatrix}}^{F} x \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

Autovalori di F: $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_1}{J} & \lambda + \frac{\beta-k_2}{J} \end{bmatrix}$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{\beta-k_2}{J}\right) + \frac{k_1}{J}$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{\beta-k_2}{J}\right)\lambda + \frac{k_1}{J}$$

Per ogni scelta degli autovalori, radici del pol. caratteristico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0, \quad p_0, p_1 \in \mathbb{R}$$

$\exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\Delta_F(\lambda) = p(\lambda) \longrightarrow \begin{cases} k_1 = p_0 J \\ k_2 = -p_1 J + \beta \end{cases}$

$\Longrightarrow$ Usando una retroazione statica dallo stato possiamo ottenere una parte reale degli autovalori del Σ retroazionato negativa a piacere

$\Longrightarrow$ non abbiamo nessun limite nelle prestazioni di controllo!