Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16: Introduzione al problema del controllo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in spazio di stato

soluzioni e analisi modale

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

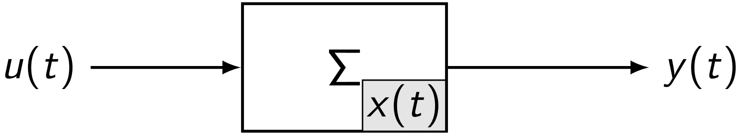
sintesi del regolatore

In questa lezione

- Problemi di controllo in catena aperta e in retroazione
- Retroazione statica di sistemi lineari

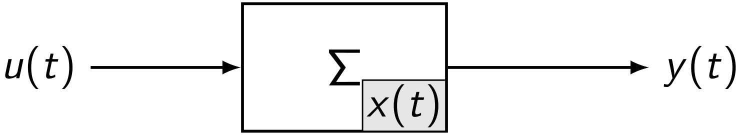
Il problema del controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Il problema del controllo

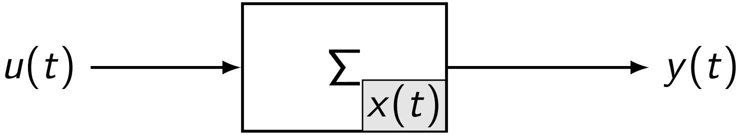
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Controllo $=$ manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso $u(t)$

Problemi di controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

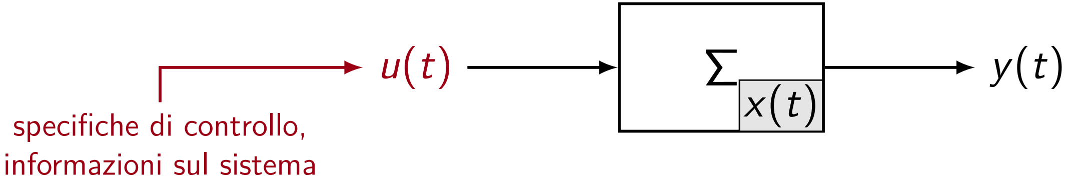


Problema di regolazione (regulation):
stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

Problema di asservimento (tracking):
inseguire un andamento desiderato dell'uscita

Controllo in catena aperta o open-loop

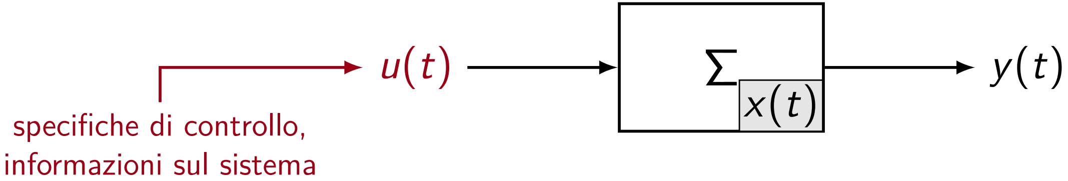
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

Controllo in catena aperta o open-loop

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

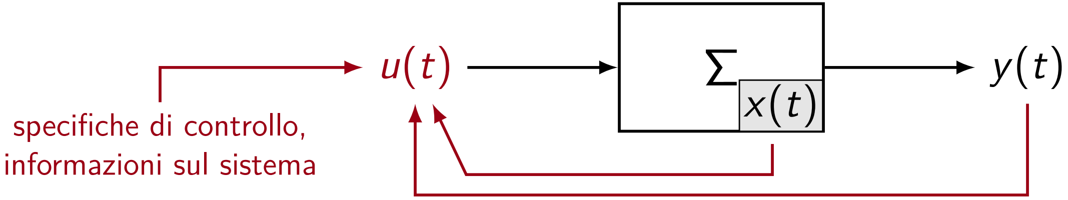


legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

approccio semplice, ma non ideale se il sistema è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!

Controllo in retroazione o feedback

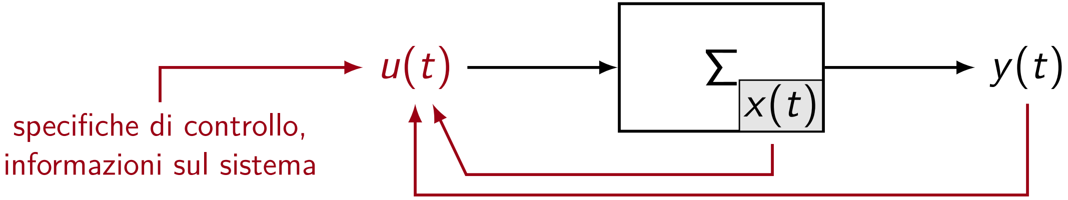
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

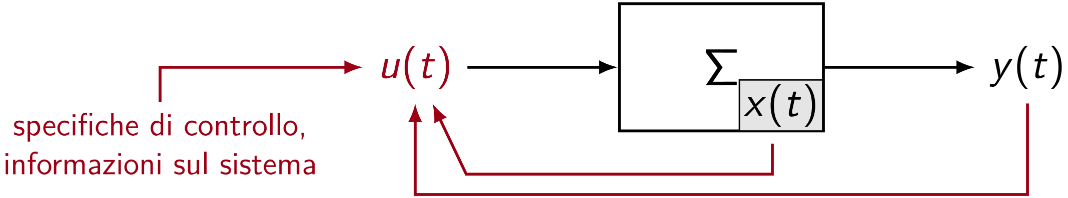


legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

approccio più complesso (richiede sensori di misura),
ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

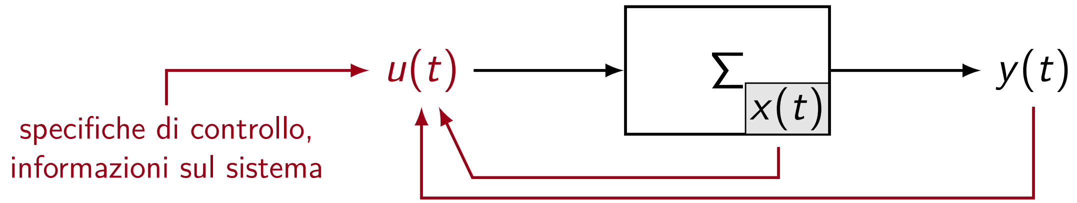


1. Retroazione statica

- dallo stato: $u(t) = f(x(t))$ (allo stesso istante t!)
- dall'uscita: $u(t) = f(y(t))$ (allo stesso istante t!)

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



2. Retroazione dinamica
- dallo stato: $u(t) = f(u(\tau), x(\tau))$, $\tau \in [t_0, t]$, $t_0 < t$
- dall'uscita: $u(t) = f(u(\tau), y(\tau))$, $\tau \in [t_0, t]$, $t_0 < t$

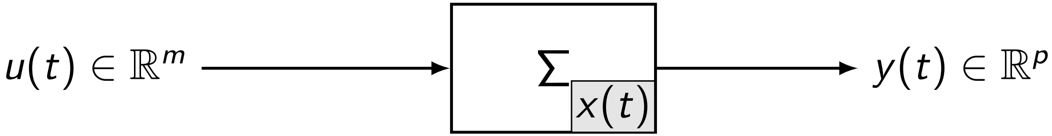
In questa lezione

- Problemi di controllo in catena aperta e in retroazione
- Retroazione statica di sistemi lineari

Controllo in retroazione statica di sistemi lineari

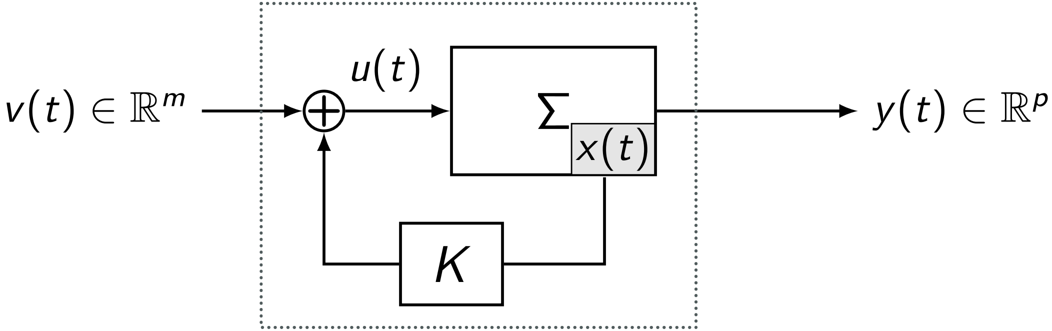
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t)$$



Controllo in retroazione statica di sistemi lineari

$$\Sigma \text{ retroazionato} \begin{cases} \dot{x}(t) = (F + GK)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

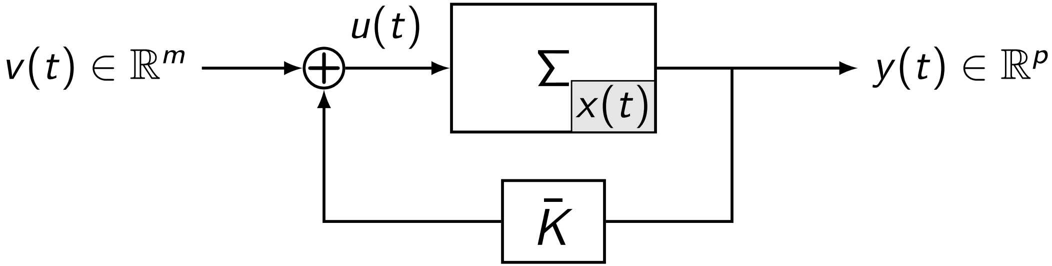


$u(t) = Kx(t) + v(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **retroazione statica dallo stato**

↳ matrice o guadagno di retroazione

Controllo in retroazione statica di sistemi lineari

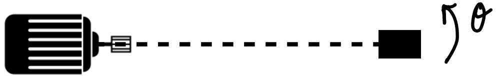
$$\Sigma \text{ retroazionato} \begin{cases} \dot{x}(t) = (F + G\bar{K}H)x(t) + Gv(t), & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$



$$u(t) = \bar{K}\overbrace{Hx(t)}^{y(t)} + v(t),\ \bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$ **retroazione statica dall'uscita**

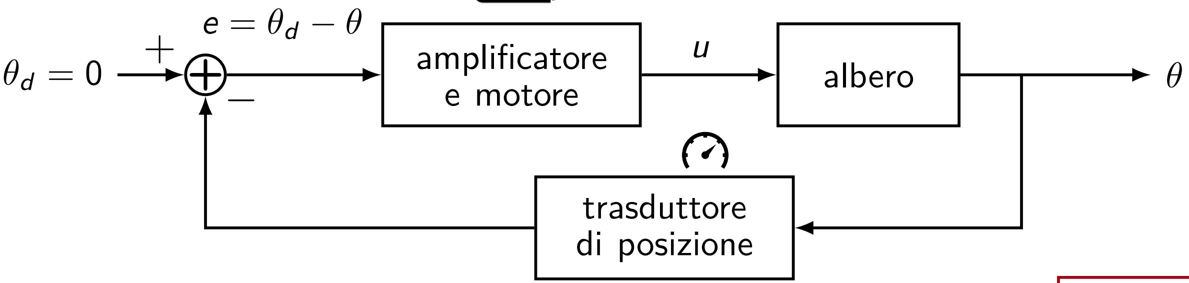
Esempio: retroazione dall'uscita

__obiettivo__: portare $\theta(t)$ a θ_d il più velocemente possibile.



$J =$ inerzia albero

$\beta =$ coeff. attrito viscoso



Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = ke,\ k \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$y = \theta \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

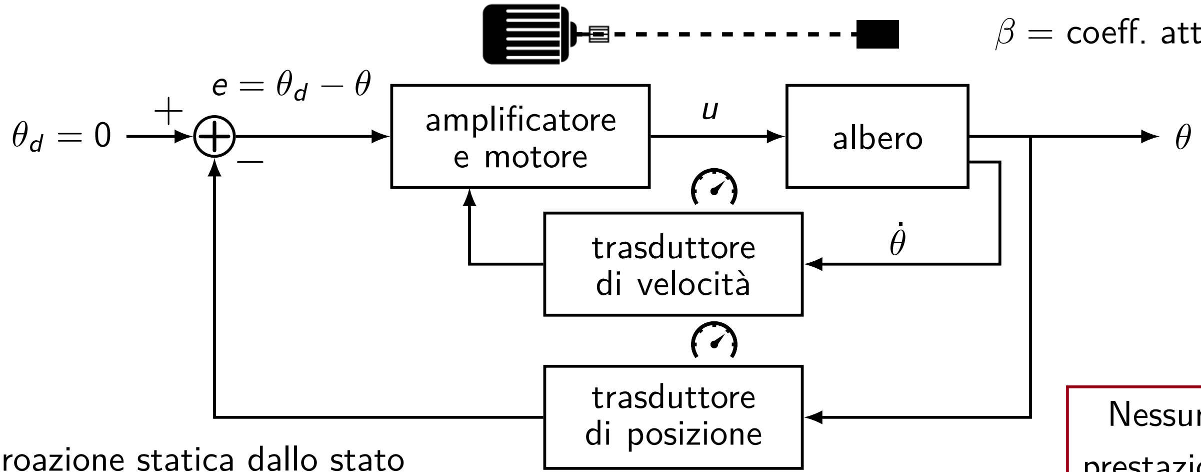
Vincoli nelle prestazioni di controllo!

note

Esempio: retroazione dallo stato

J = inerzia albero

β = coeff. attrito viscoso



Nessun vincolo nelle prestazioni di controllo!

Retroazione statica dallo stato

$$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u$$

$$u = k_1 e + k_2\dot\theta,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \dot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}$$

$$y = \theta \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

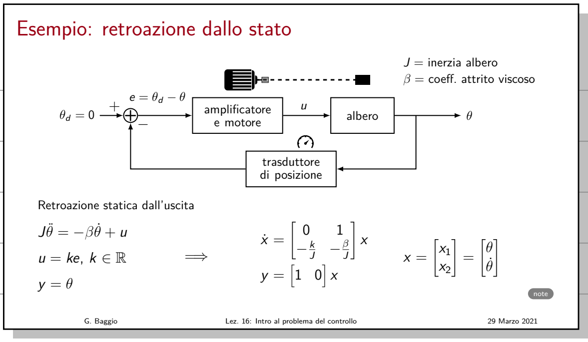
Lez. 16: Introduzione al problema del controllo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io



$\theta(t)$ = posizione angolare dell'albero

$\theta_d = 0$, J = momento d'inerzia dell'albero
β = coeff. di attrito viscoso

Equazioni dinamiche:

<u>Assunzione</u>: Le costanti di tempo del motore e del trasduttore di posizione siano trascurabili rispetto alla costante di tempo dell'albero meccanico

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u = -\beta\dot{\theta} - K\theta \\ u = Ke = K(\theta_d - \theta) = -K\theta \\ y = \theta \end{cases}$$

Rappresentazione in spazio di stato: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \underbrace{-\frac{\beta}{J}\dot{\theta} - \frac{K}{J}\theta}_{F} = -\frac{\beta}{J}x_2 - \frac{K}{J}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x \qquad K \in \mathbb{R} \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

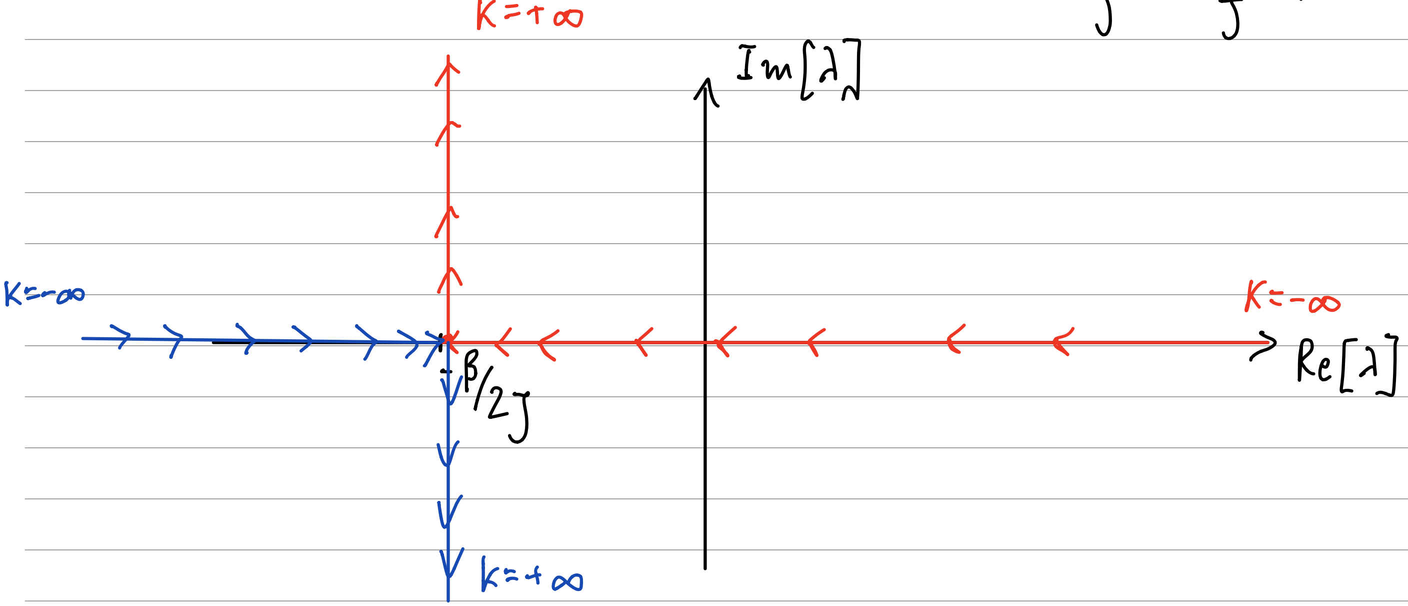
Come scegliere k in modo che $\theta(t)$ tenda $\theta_d = 0$ il più velocemente possibile?

Come scegliere k in modo che $\theta(t)$ tenda $\theta_d = 0$ il più velocemente possibile?

Come scegliere k in modo da avere $Re[\lambda_{1,2}]$ la più negativa possibile?
autovalori di F

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{J} & \lambda + \frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{\beta}{J}\right) + \frac{k}{J}$$

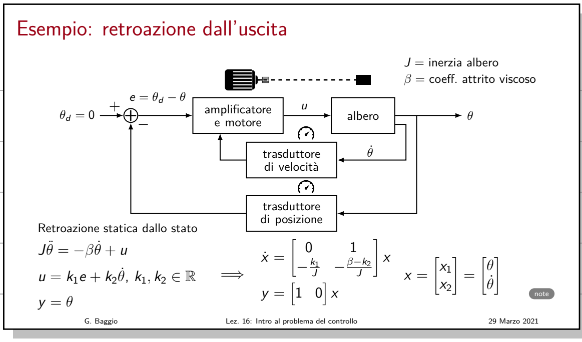
$$= \lambda^2 + \frac{\beta}{J}\lambda + \frac{k}{J}, \quad k \in \mathbb{R}$$



$\forall k \in \mathbb{R}: \max_{i=1,2} Re[\lambda_i] \geq -\frac{\beta}{2J}$ $\longrightarrow$ Σ retroazionato avrà sempre un modo $e^{\alpha t}$, $\alpha \geq -\frac{\beta}{2J}$

$\longrightarrow$ i modi elementari non potranno mai convergere a 0 più rapidamente di $e^{-\beta/2J\, t}$

$\longrightarrow$ limiti alla prontezza del sistema di controllo



$\theta(t)$ = posizione angolare dell'albero

Equazione dinamica:

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u, \quad u = K_1 \underset{\uparrow}{e}^{\theta_d - \theta} + K_2\dot{\theta} = -k_1\theta + k_2\dot{\theta}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Rappresentazione in spazio di stato: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{\beta}{J}\dot{\theta} - \frac{k_1}{J}\theta + \frac{k_2}{J}\dot{\theta} = -\frac{k_1}{J}x_1 - \frac{\beta - k_2}{J}x_2 \\ y = \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta-k_2}{J} \end{bmatrix}}^{F} x \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

Autovalori di F: $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_1}{J} & \lambda + \frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix}$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{\beta - k_2}{J}\right) + \frac{k_1}{J}$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{\beta - k_2}{J}\right)\lambda + \frac{k_1}{J}$$

Per ogni scelta degli autovalori, radici del pol. caratteristico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0, \quad p_0, p_1 \in \mathbb{R}$$

$$\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \Delta_F(\lambda) = p(\lambda) \longrightarrow \begin{cases} k_1 = p_0 J \\ k_2 = -p_1 J + \beta \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Usando una retroazione statica dallo stato possiamo ottenere una parte reale degli autovalori del Σ retroazionato negativa a piacere

$\Longrightarrow$ non abbiamo nessun limite nelle prestazioni di controllo!