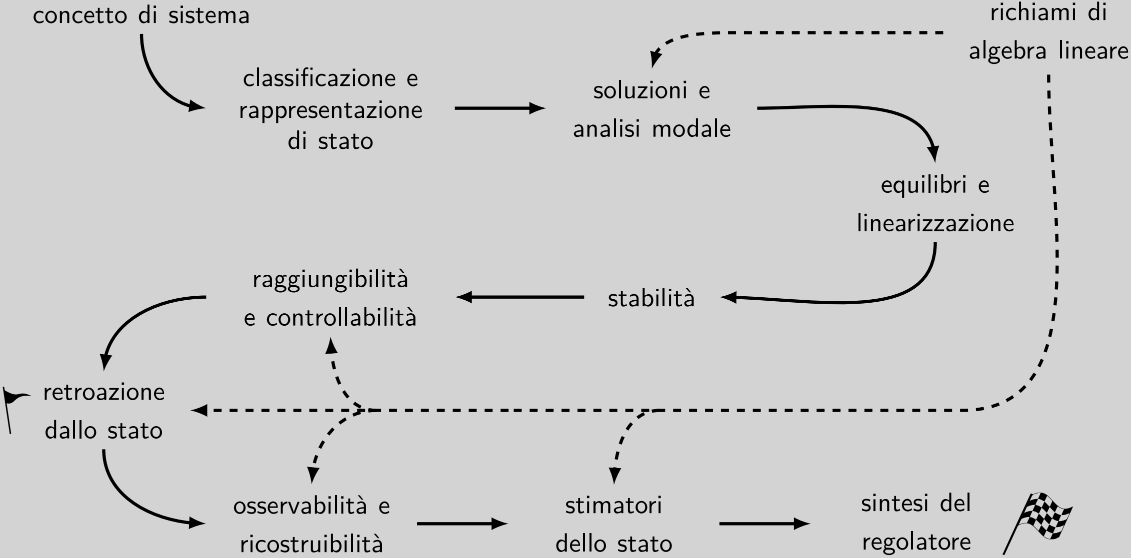
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

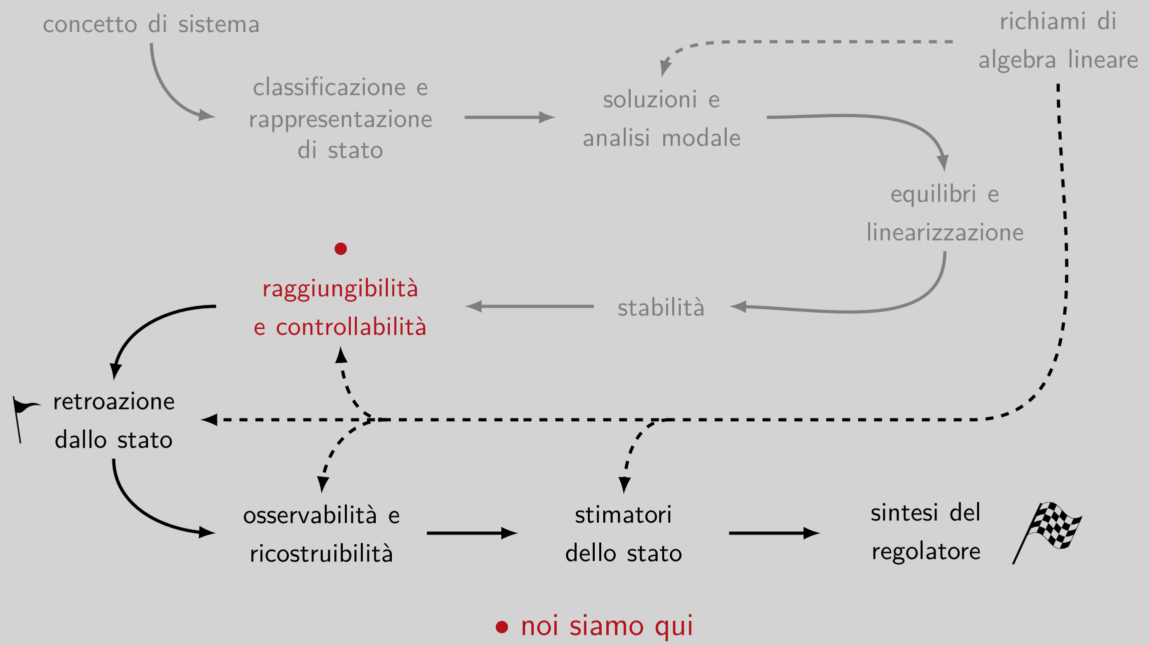
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
    - Calcolo dell'ingresso di controllo
      - Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
        - Test PBH di raggiungibilità
          - Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

In questa lezione

- Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- Calcolo dell'ingresso di controllo
- Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- Esercizi

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Raggiungibilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\quad \Sigma \quad} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{ev. forzata}}$$

Raggiungibilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

infinito dim.

$$f : \mathcal{U}[0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u(\cdot) \longmapsto \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

Raggiungibilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\quad \Sigma \quad} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Insieme di stati $\bar{x}$ raggiungibili al tempo t a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

Criterio di raggiungibilità

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

Criterio di raggiungibilità

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$!!

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c.!

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c.!

1. X_R è F-invariante $\quad v \in X_R \Rightarrow Fv \in X_R \quad \forall v$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c.!

1. X_R è F-invariante

2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \; G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c.!

1. X_R è F-invariante

2. Forma canonica di Kalman:

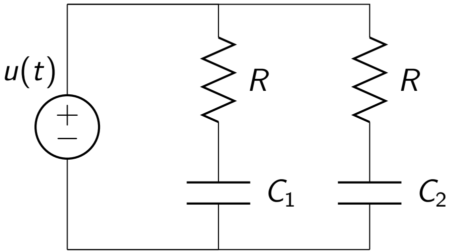
$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \ F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \ G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esempio

extra



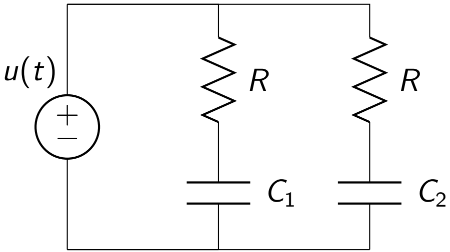
$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Esempio

extra



$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile !

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile, come costruire un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ da un stato x_0 ad un tempo fissato $t > 0$?

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile, come costruire un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ da un stato x_0 ad un tempo fissato $t > 0$?

$$u(\tau) = G^\top e^{F^\top (t-\tau)} \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^\top e^{F^\top \sigma} \, d\sigma \right)^{-1} (\bar{x} - e^{Ft} x_0), \quad \tau \in [0, t]$$

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile, come costruire un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ da un stato x_0 ad un tempo fissato $t > 0$?

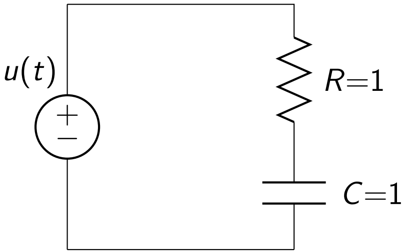
$$u(\tau) = G^\top e^{F^\top(t-\tau)} \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^\top e^{F^\top \sigma} \, d\sigma \right)^{-1} (\bar{x} - e^{Ft} x_0), \quad \tau \in [0, t]$$

1. $\mathcal{W}_t = \int_0^t e^{F\sigma} G G^\top e^{F^\top \sigma} \, d\sigma =$ Gramiano di raggiungibilità nell'intervallo $[0, t]$

2. Ingresso non unico! $u(\tau) =$ ingresso a minima energia ($\|u\|^2 = \int_0^t u(\tau)^\top u(\tau) \, d\tau$)

Esempio

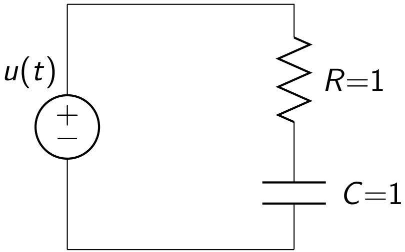
extra



Ingresso a minima energia per raggiungere $x(t) = v_C(t) = 2$ al tempo $t = 1$ a partire da $x(0) = 0$?

Esempio

extra



Ingresso a minima energia per raggiungere $x(t) = v_C(t) = 2$ al tempo $t = 1$ a partire da $x(0) = 0$?

$$u(\tau) = \frac{4e^{\tau}}{e - e^{-1}}, \ \tau \in [0, 1]$$

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Controllabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = \bar{x}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x_0 = x(t) = e^{Ft}\bar{x} + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Controllabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = \bar{x}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = e^{Ft}\bar{x} + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Insieme di stati $\bar{x}$ controllabili al tempo t allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}$?

Controllabilità *vs.* raggiungibilità

extra

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

Controllabilità *vs.* raggiungibilità

extra

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$\bar{x} \in X_C(t) \iff e^{Ft}\bar{x} \in X_R \iff \bar{x} \in e^{-Ft}X_R \iff \bar{x} \in X_R$$

$$\boxed{X_C = X_C(t) = X_R}$$

controllabilità = raggiungibilità !!

Matlab: contr(F, G)
contr(sys)

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Esercizio 1

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia controllabile.

Esercizio 1

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia controllabile.

---

1. Non esiste una tale G.
2. $G = [0\ 0\ 0]^\top$.

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

---

1. Il sistema non è raggiungibile.
2. Un tale ingresso esiste.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Criterio di raggiungibilità

extra

$X_R(t) =$ spazio raggiungibile al tempo t

$X_R =$ (massimo) spazio raggiungibile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = 0$$

$$x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$z = t - \tau$

$$x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{Fz} G u(t-z)\, dz$$

$$e^{Fz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} F^k = I + zF + \frac{z^2}{2} F^2 + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1} + \frac{z^n}{n!} F^n + \dots$$

$$\underset{k \geq n}{F^k} = \beta_0^{(k)} I + \beta_1^{(k)} F + \dots + \beta_{n-1}^{(k)} F^{n-1}$$

Cayley-Hamilton

$$e^{F\tau} = \gamma_0(\tau)\, I + \gamma_1(\tau) F + \cdots + \gamma_{n-1}(\tau)\, F^{n-1}$$

$$x(t) = \int_0^t \left(\gamma_0(\tau)\, I + \gamma_1(\tau) F + \cdots + \gamma_{n-1}(\tau) F^{n-1} \right) G\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= G \int_0^t \gamma_0(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau + FG \int_0^t \gamma_1(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau + \cdots + F^{n-1} G \int_0^t \gamma_{n-1}(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1} G \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} \int_0^t \gamma_0(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \gamma_{n-1}(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \end{bmatrix}$$

back

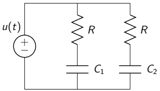
$$x(t) \in X_R(t) \Rightarrow x(t) \in \operatorname{Im} R$$

$\Leftarrow$

↳ è vero anche il viceversa!
(ma non lo vediamo)

Esempio

extra

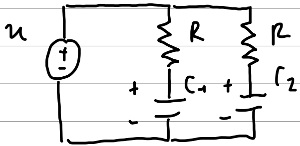


$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

back



$$x_1 = v_{C_1} \qquad x_2 = v_{C_2}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{G} u$$

$$\mathcal{R} = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2C_2^2} \end{bmatrix}$$

back

$$\det R = -\frac{1}{R^3 C_1 C_2^2} + \frac{1}{R^3 C_1^2 C_2} = \frac{1}{R^3 C_1 C_2}\left(-\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right)$$

$\underline{C_1 = C_2}$ $\longrightarrow$ $\det R = 0$

Σ non ragg.

$\underline{C_1 \neq C_2}$ $\longrightarrow$ $\det R \neq 0$

Σ ragg.

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile, come costruire un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0,t]$, per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ da un stato x_0 ad un tempo fissato $t > 0$?

$$u(\tau) = G^\top e^{F^\top (t-\tau)} \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^\top e^{F^\top \sigma}\, d\sigma \right)^{-1} (\bar{x} - e^{Ft} x_0), \quad \tau \in [0,t]$$

back

$$u(\tau) = G^T e^{F^T(t-\tau)} \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^T e^{F^T\sigma} d\sigma \right)^{-1} (\bar{x} - e^{Ft} x_0) \qquad \tau \in [0,t]$$

$$x(t) = e^{Ft} x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G G^T e^{F^T(t-\tau)} \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^T e^{F^T\sigma} d\sigma \right)^{-1} (\bar{x} - e^{Ft} x_0) d\tau$$

$$= e^{Ft} x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G G^T e^{F^T(t-\tau)} d\tau \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^T e^{F^T\sigma} d\sigma \right)^{-1} (\bar{x} - e^{Ft} x_0)$$

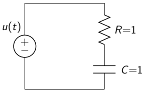
$z = t - \tau$

$$= e^{Ft}x_0 + \cancel{\int_0^t e^{F\tau} G G^T e^{F^T\tau}\,d\tau \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^T e^{F^T\sigma}\,d\sigma\right)^{-1}} \left(\bar{x} - e^{Ft}x_0\right)$$

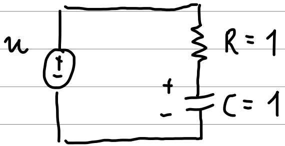
$$= \cancel{e^{Ft}}x_0 + \bar{x} - \cancel{e^{Ft}}x_0 = \bar{x}$$

Esempio

extra



Ingresso a minima energia per raggiungere $x(t) = v_C(t) = 2$ al tempo $t = 1$ a partire da $x(0) = 0$?



$x(t) = V_c(t)$

$u(\cdot)\ :\ x(0) = 0 \longrightarrow x(1) = 2\ ?$

minima energia

$$u(\tau) = G^T e^{F^T(1-\tau)} \left(\int_0^1 e^{F\sigma} G G^T e^{F^T\sigma}\, d\sigma \right) \bar{x}$$

$$\dot{x} = \dot{V}_c = \frac{1}{C} i_c = \frac{1}{C}\left(\frac{u - V_c}{R}\right) = \overset{G}{\frac{1}{RC}} u - \overset{F}{\frac{1}{RC}} x$$

$$u(\tau) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}(1-\tau)} \left(\int_0^1 e^{-\frac{2}{RC}\sigma} \frac{1}{R^2C^2}\, d\sigma \right)^{-1} 2$$

back

$$= 2e^{-(1-\tau)}\left(\int_0^1 e^{-2\sigma}\,d\sigma\right)^{-1}$$

$$= 2e^{-(1-\tau)}\left(-\frac{1}{2}\,e^{-2\sigma}\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=1}\right)^{-1} = 2e^{\tau-1}\left(-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{4e^{\tau-1}}{1-e^{-2}}$$

$$= \frac{4e^{\tau}}{e-e^{-1}} \qquad \tau \in [0,1]$$

Controllabilità *vs.* raggiungibilità

extra

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

back

$$\exists\, u(\cdot) \text{ t.c.}$$

$$\bar{x} \in X_c(t) \iff 0 = e^{Ft}\bar{x} + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$\iff e^{Ft}\bar{x} = -\int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

e^{Ft} è invertibile

$$\iff \bar{x} = -e^{-Ft}\int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$\iff \bar{x} \in e^{-Ft} X_R(t) = e^{-Ft} X_R$$

$$=$$

$$\overset{1)+2)}{\iff} \bar{x} \in X_R$$

1) X_R è F-invariante:

$$\forall v \in X_R \Rightarrow Fv \in X_R$$

$$\Rightarrow F^2 v = F\cdot(Fv) \in X_R$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow F^k v \in X_R$$

$$\Rightarrow e^F v \in X_R$$

back

$\forall v \in X_R \implies e^{-Ft} v \in X_R$

2) e^{Ft} è invertibile $\dim[e^{-Ft} X_R] = \dim[X_R]$

Esercizio 1

extra

$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia controllabile.

back

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t) \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1) $\exists\, G \in \mathbb{R}^3$ t.c. Σ raggiungibile?

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad g_i \in \mathbb{R}$$

Autovalori di F:

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -4 & 4 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\left((-1-\lambda)(1-\lambda) + 1\right)$$

$$= -\lambda\left(-\cancel{1} + \lambda^2 + \cancel{1}\right)$$

$$= -\lambda^3$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \nu_1 = 3$

$$g_1 = \dim \operatorname{Ker}(F - \lambda_1 I) = \dim \operatorname{Ker} F$$

$$\dim \operatorname{Ker} F = 3 - \operatorname{rank}(F) = 3 - 1 = 2$$

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right] \qquad G = \begin{bmatrix} \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad (m \geq 2) \to \text{per avere } \Sigma \text{ ragg.}$$

Per il test di Jordan $\nexists\, G \in \mathbb{R}^3$ t.c. Σ raggiungibile

back

2) $\exists\, G \in \mathbb{R}^3$ t.c. Σ controllabile ?

$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ $\qquad x(t) = F^t x(0) \xrightarrow{\text{base Jordan}} z(t) = F_J^t z(0)$

$t \geq 2 \qquad F_J^t = 0$

Σ è controllabile

Qualsiasi $G \in \mathbb{R}^3$

$[zI - F \mid G]$ rango pieno $\forall z$ autovalori di F $\quad z \neq 0$

Σ controllabile

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $R = [G \ \ FG \ \ F^2G] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & * \\ 1 & -1 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ $\qquad \Sigma$ non è ragg.

2) $\exists\, u(\cdot)$ t.c. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad x(1) = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix}$?

back

$$x(1) = e^F x(0) + \int_0^1 e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau \qquad X_R = \operatorname{Im} R$$

$$x(1) - e^F x(0) \in X_R(1) = X_R \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \in X_R$$

$$\begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - e^F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 0 \end{bmatrix} \in X_R$$

$$e^F = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-1} \end{array}\right]$$

Quindi $\exists\, u(\cdot)$ tale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x(1) = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix}$!