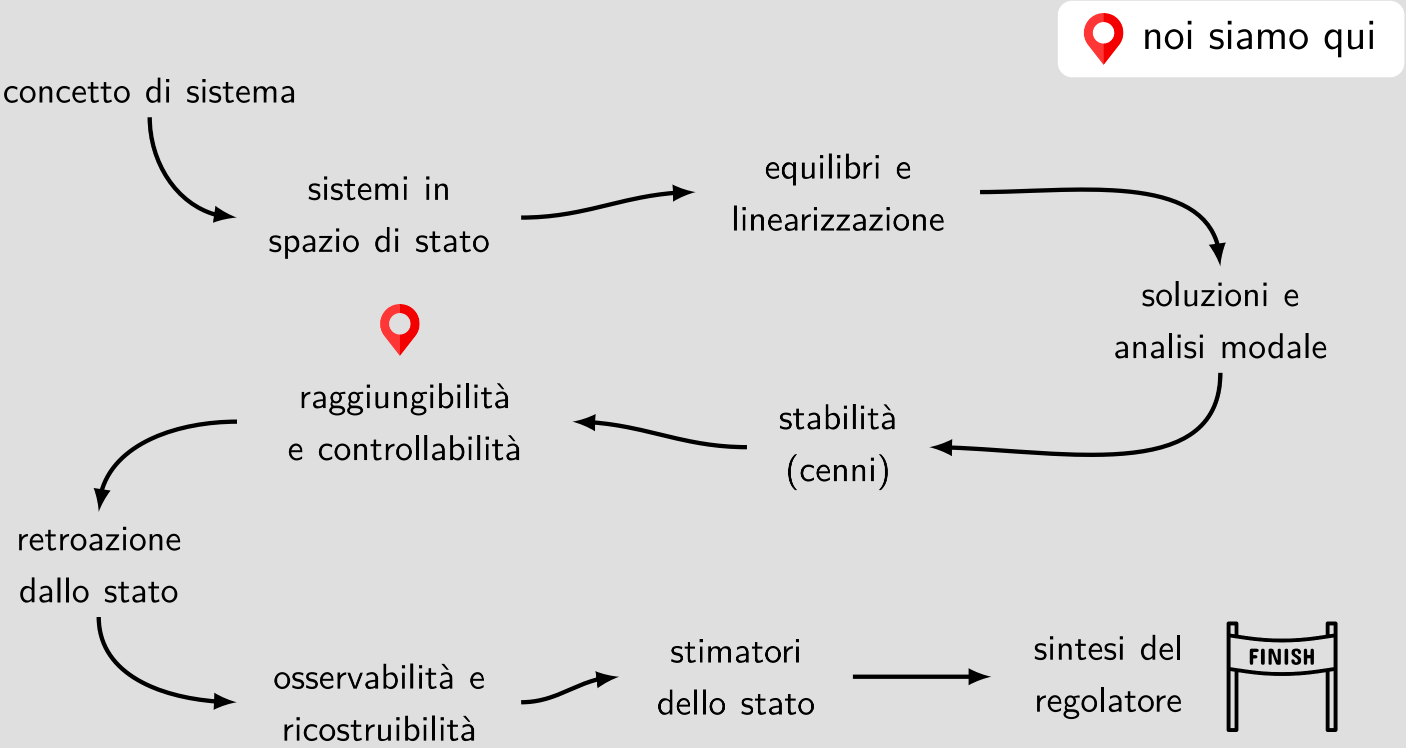
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 3)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

$$R = [G \ FG \ \cdots \ F^{n-1}G] \qquad \mathrm{rank}(R) \begin{cases} = n & \Sigma = (F,G) \text{ raggiungibile} \\ < n & \Sigma = (F,G) \text{ non raggiungibile} \end{cases}$$

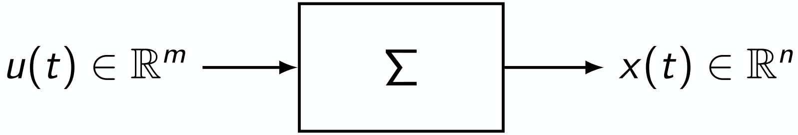
- ▷ Controllo a minima energia a t.d. $\quad u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} x^*$
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità

In questa lezione

- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Controllabilità e forma di Kalman
- ▷ Test PBH di controllabilità

Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$



$$x^* = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\; x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\quad\Sigma\quad} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

controllabilità a zero

$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$X_c(t)$ = spazio controllabile in t passi

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t (= in t passi) allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

$X_c(t) = \mathbb{R}^n$

Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F^t x \in \operatorname{im}(\mathcal{R}_t)\}$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$: $\exists\, u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ che soddisfa $0 = F^t x_0 + R_t u_t$

" " " " $F^t x_0 = -R_t u_t$

$F^t x_0 \in \operatorname{im} R_t$

Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; F^t x \in \operatorname{im}(\mathcal{R}_t)\}$$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq \overset{\text{dim del sistema}}{n}$ tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di controllabilità}$$

$$X_C \triangleq X_C(i) = \text{(massimo) spazio controllabile} = X_c(n)$$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

note

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \operatorname{im}(F^n) \subseteq \operatorname{im}(\mathcal{R}) = X_R}$$

note

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{im}(F^n) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}) = X_R}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

note

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

note

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$ ma controllabile se $\alpha_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ raggiungibile e quindi controllabile

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile ma controllabile (in 2 passi)

note

In questa lezione

- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Controllabilità e forma di Kalman
- ▷ Test PBH di controllabilità

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \;\; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

note

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \;\; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists\, \bar{t} : F_{22}^t = 0,\ t \geq \bar{t} \Leftrightarrow F_{22}$ nilpotente (autovalori di $F_{22} = 0$)

2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile

3. Σ **reversibile** ($= F$ invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

note

In questa lezione

- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Controllabilità e forma di Kalman
- ▷ Test PBH di controllabilità

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\mathrm{PBH}(z) = \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

Se $\text{rank}(\mathrm{PBH}(z)) < n$ solo per $z = 0$ $\implies$ l'unico autovalore "non raggiungibile" ($=$ autovalore di F_{22}) è $\lambda = 0$

$\implies \Sigma$ controllabile

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F !

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 3)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$X_C = X_C(n) = \{ x \in \mathbb{R}^n : F^n x \in \operatorname{im} R_n \}$$

$$\operatorname{im} R_n = \operatorname{im} R = X_R$$

$X_C = \mathbb{R}^n \iff X_C(n) = \mathbb{R}^n \iff$ ogni $x \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $F^n x \in \operatorname{im} R$

$$\iff \boxed{\operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} R = X_R}$$

Σ raggiungibile $\Rightarrow X_R = \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{im} F^n \subseteq X_R = \mathbb{R}^n \Rightarrow \Sigma$ controllabile

Σ non raggiungibile ma $F = 0 \Rightarrow \operatorname{im} F^n = \{0\} \subseteq X_R \Rightarrow \Sigma$ controllabile

Σ controllabile $\not\Rightarrow \Sigma$ raggiungibile

$$\boxed{\text{RAGGIUNGIBILITÀ} \;\; \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \;\; \text{CONTROLLABILITÀ}}$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

note

1) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Sigma = (F, G)$ non ragg. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, Σ controllabile?

Dobbiamo verificare se $\operatorname{im} F^2 \subseteq \operatorname{im} R = X_R$ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$X_R = \operatorname{im} R = \operatorname{im} [G \;\; FG] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{im} F^2 = \begin{cases} \{0\} & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0 \\ \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0 \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0 \end{cases}$$

First two cases: $\operatorname{im} F^2 \subseteq X_R \Rightarrow \Sigma$ controllabile

Last two cases: $\operatorname{im} F^2 \not\subseteq X_R \Rightarrow \Sigma$ non controllabile

2) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rank} R = 2 \Rightarrow \Sigma$ raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$

$\Rightarrow \Sigma$ controllabile $\forall \alpha_1, \alpha_2$

3) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$X_c(1) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Fx \in \operatorname{im} R_1 \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Fx \in \operatorname{im} G \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_c(2) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : F^2 x \in \operatorname{im} R_2 \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : F^2 x \in \operatorname{im} [G \ FG] \} \quad (*)$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = [G \ FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(*) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$\Longrightarrow \Sigma$ controllabile in 2 passi

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

note

Σ non raggiungibile, $\operatorname{rank}(R) = k < n$

$$\exists T \longrightarrow \begin{cases} x_R(t+1) = F_{11} x_R(t) + F_{12} x_{NR}(t) + G_1 u(t) \\ x_{NR}(t+1) = F_{22} x_{NR}(t) \end{cases}$$

Σ_R = sottosistema raggiungibile (descritto da x_R)

Σ_{NR} = sottosistema non raggiungibile (descritto da x_{NR})

1) Σ_R raggiungibile $\Longrightarrow$ Σ_R controllabile

$\exists \bar{t}, u_{\bar{t}}$ t.c. $x_R(\bar{t}) = 0 \quad \forall x_R(0) \in \mathbb{R}^k$

Σ_{NR} non raggiungibile, quando è controllabile?

$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$

Quando $\exists \bar{t}$ t.c. $x_{NR}(\bar{t}) = F_{22}^{\bar{t}} x_{NR}(0) = 0 \quad \forall x_{NR}(0) \in \mathbb{R}^{n-k}$?

$\exists \bar{t}$ t.c. $F_{22}^{\bar{t}} v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n-k} \iff \exists \bar{t}$ t.c. $F_{22}^{\bar{t}} = 0$

$\iff F_{22}$ è nilpotente

$\iff$ l'unico autovalore di F_{22} è zero

A è nilpotente $A^{\bar{t}} = 0$.
Se λ è un autovalore di A
e $v \neq 0$ il corrisp. autovettore

$$Av = \lambda v \rightarrow A^{\bar{t}} v = \lambda^{\bar{t}} v = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda = 0$$

2) $X_R = \left\{ \begin{bmatrix} x_R \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}n-k \end{matrix}, \; x_R \in \mathbb{R}^k \right\} \subseteq X_C$

F_{22} invertibile $\Rightarrow x_{NR}(t) = F_{22}^{t}\, x_{NR}(0) = 0 \iff x_{NR}(0) = 0$

$\Rightarrow X_R = X_C$ (ragg è equivalente alla controllabilità)

3) Se F è invertibile $\iff T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$ è invertibile

$\Rightarrow F_{22}$ è invertibile

$\Rightarrow X_C = X_R$ (ragg. è equivalente alla contr.)

<u>Def.</u>

Un sistema a tempo discreto in cui la matrice di stato F è invertibile si dice <u>reversibile</u>.

è sempre ricostruire lo stato iniziale $x(0)$
a partire dalla conoscenza $x(t)$, $u(\cdot)$

$$x(t) = F^{t} x(0) + R_t u_t \longrightarrow F^{t} x(0) = x(t) - R_t u_t$$

$$\longrightarrow x(0) = F^{-t} x(t) - F^{-t} R_t u_t$$