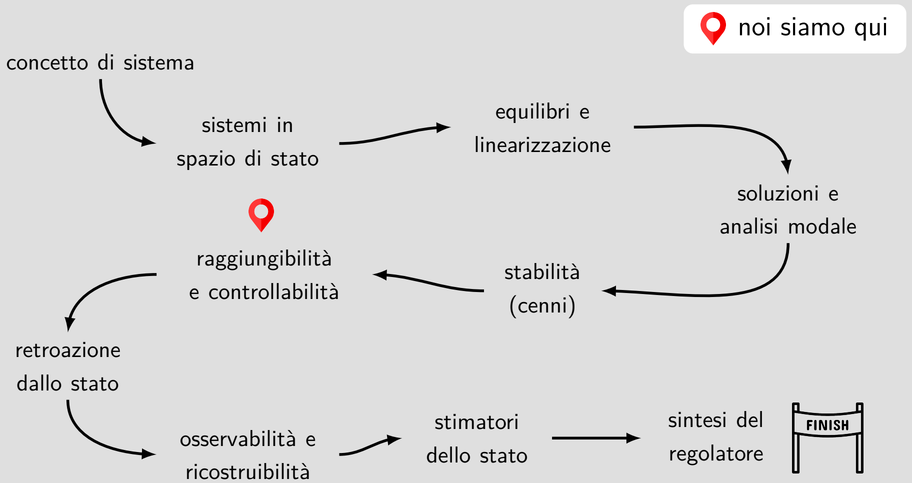
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 3)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

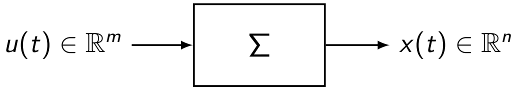


In questa lezione

- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Controllabilità e forma di Kalman
- ▷ Test PBH di controllabilità

Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$



$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t (= in t passi) allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F^t x \in \text{im}(\mathcal{R}_t)\}$$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di controllabilità}$$

$$X_C \triangleq X_C(i) = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{im}(F^n) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}) = X_R}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$ ma controllabile se $\alpha_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ raggiungibile e quindi controllabile

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$ non raggiungibile ma controllabile (in 2 passi)

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists\, \bar{t} : F_{22}^t = 0,\ t \geq \bar{t} \Leftrightarrow F_{22}$ nilpotente (autovalori di $F_{22} = 0$)

2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile

3. Σ **reversibile** ($= F$ invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F !