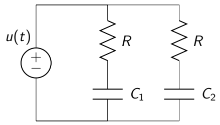
Esempio



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$

Σ raggiungibile ?

note

$$x_1(t) = V_{C_1}(t), \quad X_2(t) = V_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{F} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{G} u(t)$$

$$\mathcal{R} = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2C_2^2} \end{bmatrix} \qquad R, C_1, C_2 > 0$$

$$\det \mathcal{R} = -\frac{1}{R^3C_1C_2^2} + \frac{1}{R^3C_1^2C_2} = \frac{1}{R^3C_1C_2}\left(-\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right) \begin{cases} = 0 & C_1 = C_2 \\ \neq 0 & C_1 \neq C_2 \end{cases}$$

Se $C_1 = C_2$: Σ non è raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$: Σ è raggiungibile

Controllabilità = raggiungibilità

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

note

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\downarrow \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} = T^{-1}x \quad (T, \text{ base di Kalman})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_{NR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_R = F_{11} x_R + F_{12} x_{NR} + G_1 u & \Sigma_R \text{ raggiungibile} \\ \dot{x}_{NR} = F_{22} x_{NR} & \Sigma_{NR} \text{ non raggiungibile} \end{cases}$$

Σ_R raggiungibile $\Longrightarrow$ Σ_R controllabile

Σ_{NR}: $x_{NR}(t) = e^{F_{22}t} x_{NR}(0)$

Quando $x_{NR}(t) = 0 \;\; \forall t \geq \bar{t}$ e $\forall x_{NR}(0)$?

Mai, perché a t.c. non abbiamo modi convergenti in tempo finito!

$\Longrightarrow$ Σ_{NR} non controllabile

$$\boxed{\text{Raggiungibilità} \iff \text{Controllabilità}}$$

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -4 & 4 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$$

1) G t.c. Σ raggiungibile?

Usiamo il test PBH:

1) Calcolo autovalori F: $\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(\underset{}{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{F_{22}}}})$

$$\Delta_{F_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1) + 1 = \lambda^2 \cancel{-1} \cancel{+1}$$

Autovalori F: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$

$$PBH(0) = [-F \quad G] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & g_1 \\ -1 & 1 & 0 & g_2 \\ -4 & 4 & 0 & g_3 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(PBH(0)) \leq 2 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow \Sigma$ non ragg. $\forall G \in \mathbb{R}^3$

2) G t.c. Σ controllabile?

L'unico autovalore di F è 0 (F nilpotente)

$\Longrightarrow \Sigma$ controllabile $\forall G \in \mathbb{R}^3$

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

1) $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile?

$$R = [G \ \ FG \ \ F^2G] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\, R = 1 \Rightarrow \Sigma \text{ non ragg.}$$

2) $u(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, tale che $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(1) = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix}$

i) Esistenza di $u(\cdot)$.

$$\underbrace{x(1) - e^F x(0)} \in X_R(1) = X_R = \text{im}\, R = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - e^F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{F_{11}} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 0 \end{bmatrix} \in X_R$$

$$e^F = \begin{bmatrix} e^{F_{11}} & 0 \\ 0 & e^{F_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{F_{11}} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

l'ingresso richiesto esiste