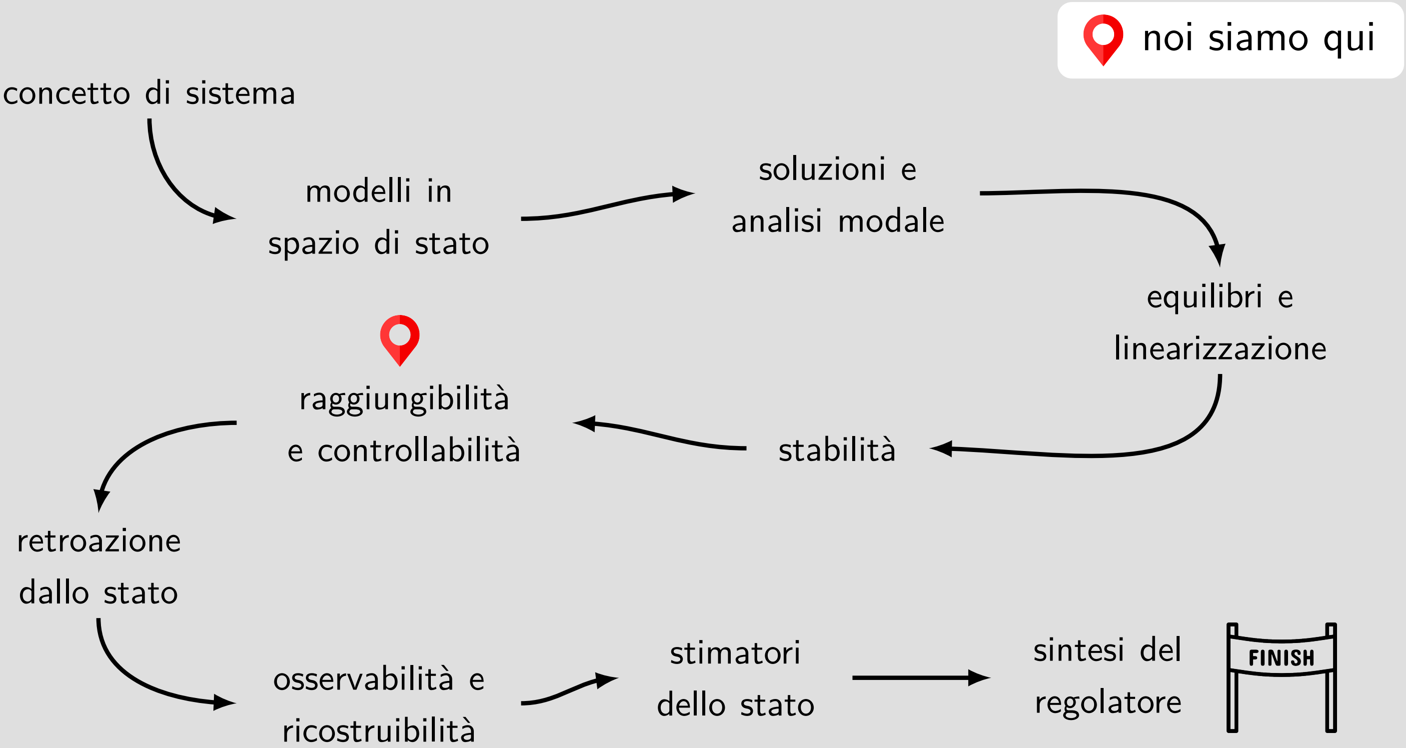
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

$\exists\, T \in \mathbb{R}^{n\times n}: \quad \Sigma = (F, G) \xrightarrow{z = T^{-1}x} \Sigma_K = (F_K, G_K)$

$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Sigma_R = (F_{11}, G_1)$ è sottosistema ragg.

$\Sigma_{NR} = (F_{22}, 0)$ è sottosistema non ragg.

- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

$X_c(t) \subseteq X_c(t+1) \quad \forall t \geq 0$

$\exists\, i \leq n$ t.c. $X_c(j) = X_c(i) \quad \forall j \geq i$

Criterio di controllabilità: Σ controllabile $\iff \operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} R = X_R$

In questa lezione

- Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- Esercizi

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità del rango

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

Criterio di raggiungibilità del rango

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \mathrm{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

Criterio di raggiungibilità del rango

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$

$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \mathrm{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$!!

$X_R(t) = X_R \quad \forall\, t > 0$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$

2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \; G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$

2. Forma canonica di Kalman:

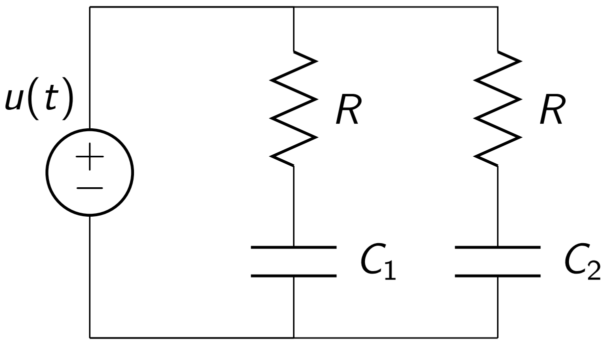
$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \; G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

[z autovalori di F]

Esempio



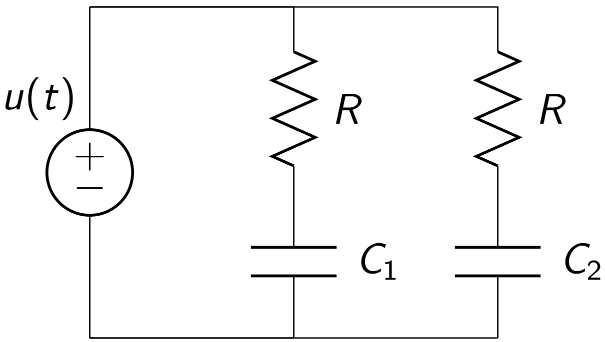
$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

note

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile !

note

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\; x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Controllabilità = raggiungibilità

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

note

Controllabilità = raggiungibilità

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$\cancel{x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R}$$

$$\boxed{X_C = X_C(t) = X_R}$$

controllabilità = raggiungibilità !!

note

In questa lezione

- Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- Esercizi

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.

note

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.

---

1. Non esiste una tale G.
2. Una $G \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi.

note

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

---

note

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

---

1. Il sistema non è raggiungibile.
2. Un tale ingresso esiste.

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

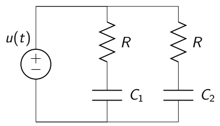
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$

Σ raggiungibile ?

note

$$x_1(t) = V_{C_1}(t), \quad x_2(t) = V_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{F} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{G} u(t)$$

$$\mathcal{R} = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2C_2^2} \end{bmatrix} \qquad R, C_1, C_2 > 0$$

$$\det \mathcal{R} = -\frac{1}{R^3C_1C_2^2} + \frac{1}{R^3C_1^2C_2} = \frac{1}{R^3C_1C_2}\left(-\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right) \begin{cases} = 0 & C_1 = C_2 \\ \neq 0 & C_1 \neq C_2 \end{cases}$$

Se $C_1 = C_2$: Σ non è raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$: Σ è raggiungibile

Controllabilità = raggiungibilità

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\downarrow \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} = T^{-1}x \quad (T, \text{ base di Kalman})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_{NR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_R = F_{11}x_R + F_{12}x_{NR} + G_1 u & \Sigma_R \text{ raggiungibile} \\ \dot{x}_{NR} = F_{22}x_{NR} & \Sigma_{NR} \text{ non raggiungibile} \end{cases}$$

Σ_R raggiungibile $\Longrightarrow$ Σ_R controllabile

Σ_{NR}: $x_{NR}(t) = e^{F_{22}t}x_{NR}(0)$

Quando $x_{NR}(t) = 0 \ \forall t \geq \bar{t}$ e $\forall x_{NR}(0)$?

Mai, perché a t.c. non abbiamo modi convergenti in tempo finito!

$\Longrightarrow$ Σ_{NR} non controllabile

$$\boxed{\text{Raggiungibilità} \iff \text{Controllabilità}}$$

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.

note

$$F = \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hdashline -4 & 4 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$$

1) G t.c. Σ raggiungibile?

Usiamo il test PBH:

1) Calcolo autovalori F: $\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(\underset{0}{\underbrace{F_{22}}})$

$$\Delta_{F_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1) + 1 = \lambda^2 \cancel{-1} \cancel{+1}$$

Autovalori F: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 3$

$$PBH(0) = [-F \quad G] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & g_1 \\ -1 & 1 & 0 & g_2 \\ -4 & 4 & 0 & g_3 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(PBH(0)) \leq 2 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \Sigma$ non ragg. $\forall G \in \mathbb{R}^3$

2) G t.c. Σ controllabile?

L'unico autovalore di F è 0 (F nilpotente)

$\Longrightarrow \Sigma$ controllabile $\forall G \in \mathbb{R}^3$

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

note

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

1) $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile?

$$R = [G \;\; FG \;\; F^2G] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } R = 1 \Rightarrow \Sigma \text{ non ragg.}$$

2) $u(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, tale che $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(1) = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix}$

i) Esistenza di $u(\cdot)$.

$$\underbrace{x(1) - e^F x(0)} \in X_R(1) = X_R = \text{im } R = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - e^F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{F_{11}} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 1/e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 0 \end{bmatrix} \in X_R$$

$$e^F = \begin{bmatrix} e^{F_{11}} & 0 \\ 0 & e^{F_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{F_{11}} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

l'ingresso richiesto esiste