Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

noi siamo qui

concetto di sistema

sistemi in spazio di stato

equilibri e linearizzazione

soluzioni e analisi modale

stabilità (cenni)

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

FINISH

Nella scorsa lezione

- Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.

$$X_R(t) = \operatorname{im} R_t$$

$$R_t = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix}$$

In questa lezione

- ▷ Controllo a minima energia a t.d.
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità

Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

$\boxed{\text{Se } \Sigma \text{ è raggiungibile in } t \text{ passi, come costruire una sequenza di ingresso } u_t \in \mathbb{R}^{mt} \text{ per raggiungere un qualsiasi stato } x^* \in \mathbb{R}^n \text{ in } t \text{ passi?}}$

note

Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $x^* = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t$, $\eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$

note

Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $x^* = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t,\ \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$

Caso $x_0 \neq 0$: $\quad u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (x^* - F^t x_0)$

note

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u_t' = u_t + \bar{u},\ \ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

2. Ingresso a **minima "energia"**:

$$u^*_t = \arg\min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2 = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1}(x^* - F^t x_0).$$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

2. Ingresso a **minima "energia"**:

$$u_t^* = \arg\min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2 = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1}(x^* - F^t x_0).$$

3. L'energia minima per raggiungere x^* in t passi è:

$$\|u_t^*\|^2 = (x^*)^\top \mathcal{W}_t^{-1} x^*,$$

dove $\mathcal{W}_t \triangleq \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} F^{k\cancel{-1}} G G^\top (F^\top)^{k\cancel{-1}}$ è detto Gramiano di raggiungibilità in t passi del sistema. Gli autovalori di $\mathcal{W}_t$ quantificano l'energia minima richiesta per raggiungere diversi stati $x(t) = x^*$ del sistema.

Esempio

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

note

Esempio

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \ u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$ $\qquad u^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ u^*(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ min. energia

note

In questa lezione

- ▷ Controllo a minima energia a t.d.
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità

Spazi raggiungibili: interpretazione geometrica

Definizione: Data una $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F-invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

$$W = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad F = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad v \in W,\ v = \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow Fv = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\alpha\\ 2\alpha\end{bmatrix} \in W$$

$\operatorname{im} \mathcal{R} = \operatorname{im}\,[G \ FG \cdots F^{n-1}G] \implies W$ è F-invariante

Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F-invariante e contiene im(G).

è conseguenza del Teorema di Cayley-Hamilt

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

note

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile } \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}, \qquad X_R = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R,\ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{w},\ \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\text{im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G},\ G_2 = 0$$

note

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\mathcal{R}_K) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix}\right) = k$$

$$= \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{k-1}G_1 \end{bmatrix}\right)$$

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

note

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ $\Longrightarrow$ sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ $\Longrightarrow$ sistema **non** in forma di Kalman

note

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} \overbrace{H_1}^{k} & \overbrace{H_2}^{n-k} \end{bmatrix}$$

note

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$ = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

note

In questa lezione

- ▷ Controllo a minima energia a t.d.
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\mathrm{PBH}(z) = \begin{array}{c} n+m \\ \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} \end{array} \; n$$

ha rango pieno ($\operatorname{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\operatorname{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

autovalori "non raggiungibili"

note

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\bar{F} = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22})$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

N.B. Essendo gli autovalori di F_{22} un sottoinsieme degli autovalori di F, il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli z che sono autovalori di F !

note

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

note

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$ raggiungibile

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$ non raggiungibile

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

note

$\Sigma = (F, G)$ raggiungibile in t passi

$x^* = x(t) \longrightarrow u_t$?

$\boxed{x_0 = 0}$ $\quad x^* = x(t) = R_t u_t \quad (*)$

Definiamo u_t tramite una variabile ausiliaria $\eta_t \in \mathbb{R}^n$:

$$u_t = R_t^T \eta_t$$

$(*) \longrightarrow x^* = (R_t R_t^T) \eta_t$ $\longrightarrow$ $R_t R_t^T$ è invertibile perché Σ ragg. in t passi

$\longrightarrow \eta_t = (R_t R_t^T)^{-1} x^*$

$$\longrightarrow \boxed{u_t = R_t^T \eta_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} x^*}$$

u_t è unico? $\quad \bar{u} \in \ker R_t \quad u'_t = u_t + \bar{u}$

$$R_t u'_t = R_t (u_t + \bar{u}) = R_t u_t + \cancel{R_t \bar{u}} = R_t u_t = x^*$$

$\mathcal{U}_t = \{ u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker R_t \}$ = insieme degli ingressi ammissibili

$\boxed{x_0 \neq 0}$ $\quad x^* = x(t) = F^t x_0 + R_t u_t$

$\longrightarrow x^* - F^t x_0 = R_t u_t$

termine che "compensa" l'evoluzione libera

$$\longrightarrow \boxed{u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} (x^* - F^t x_0)}$$

Esempio

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_0 = 0$$

$\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile in 2 passi

u_2 per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in 2 passi?

$$u_2 = R_2^T (R_2 R_2^T)^{-1} x^* \qquad R_2 = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 R_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(1) \\ \hdashline u'(0) \end{bmatrix} \qquad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ker R_2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \ker R_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{ u_2' = u_2 + \bar{u}, \; \bar{u} \in \ker R_2 \} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(1) \\ \hdashline u'(0) \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

Σ non raggiungibile $\implies$ $\mathrm{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$\mathcal{R} = [G \;\; FG \;\cdots\; F^{n-1}G]$$

$$\mathrm{rank}(\mathcal{R}) = k < n \longrightarrow \Sigma = (F,G) \text{ non ragg.}$$

$X_R = \mathrm{im}\,\mathcal{R} = \mathrm{span}\{v_1,\dots,v_k\}$, $\{v_1,\dots,v_k\}$ base di X_R

Definiamo $T = [v_1 \cdots v_k \; \tilde v_1 \cdots \tilde v_{n-k}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$

con $\tilde v_1,\dots,\tilde v_{n-k}$ lin. indip. e t.c. $\{v_1,\dots,v_k,\tilde v_1,\dots,\tilde v_{n-k}\}$ base di $\mathbb{R}^n$

$$v \in X_R \longrightarrow v' = T^{-1}v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-k \end{matrix} = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w = Fv,\ v \in X_R \xrightarrow{X_R \text{ F-invariante}} w \in X_R \longrightarrow w' = T^{-1}w = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-k \end{matrix} = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F \longrightarrow F' = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix},\ F_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k},\ F_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$$

$$w' = T^{-1}w = T^{-1}Fv = T^{-1}FTT^{-1}v = F'v'$$

$$\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} w^{(1)} = F_{11}v^{(1)} \\ 0 = F_{21}v^{(1)} \end{cases} \quad \forall v^{(1)} \in \mathbb{R}^k$$

$$F_{21}v^{(1)} = 0 \quad \forall v^{(1)} \in \mathbb{R}^k \implies \boxed{F_{21} = 0}$$

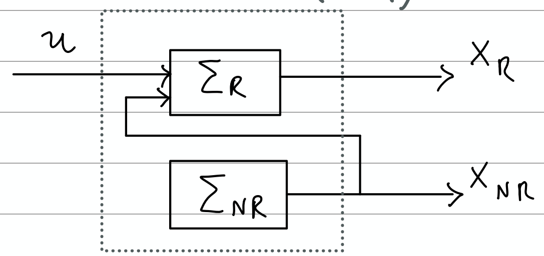
$$G' = T^{-1}G \xrightarrow{\mathrm{im}\,G \subseteq X_R} G' = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, k \\ \}\, n-k \end{matrix}$$

$$z = T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R \\ \hdashline x_{NR} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}K \\ \}n-K \end{matrix}$$

$$z(t+1) = \left[\begin{array}{c:c} F_{11} & F_{12} \\ \hdashline 0 & F_{22} \end{array}\right] z(t) + \begin{bmatrix} G_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} u(t) \longrightarrow \text{forma di Kalman}$$

$$\begin{cases} x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1 u(t) \longrightarrow \text{sottosistema raggiungibile } \Sigma_R \\ x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t) \longrightarrow \text{sottosistema non raggiungibile } \Sigma_{NR} \end{cases}$$

$\Sigma = (F, G)$



$$R_K = T^{-1}R = \left[G' \quad F'G' \quad \cdots \quad (F')^{n-1}G' \right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

N.B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{l} = \begin{bmatrix} A_1^l & * \\ 0 & A_2^l \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & F_{11}^2 G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}K \\ \}n-K \end{matrix}$$

$$\text{rank}(R_K) = \text{rank}(R) = K = \text{rank}\left(\left[G_1 \quad F_{11}G_1 \quad F_{11}^2 G_1 \cdots F_{11}^{n-1}G_1\right]\right)$$

$$\text{Cayley-Hamilton} \longrightarrow = \text{rank}\left(\left[G_1 \quad F_{11}G_1 \cdots F_{11}^{K-1}G_1\right]\right)$$

$$= \text{rank}(R_R), \quad R_R = \text{matrice di ragg. di } \Sigma_R = (F_{11}, G_1)$$

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

note

1) $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$ $\quad G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Sigma = (F, G)$ è in forma di Kalman?

Dobbiamo verificare se $\hat{\Sigma}_R = (F_{11}, G_1)$ è raggiungibile.

$\hat{R}_R = [G_1 \quad F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rank } \hat{R}_R = 2 \Rightarrow \hat{\Sigma}_R = \Sigma_R$ è ragg.

$\Rightarrow \Sigma$ è in forma di Kalman

2) $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$ $\quad G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Sigma = (F, G)$ è in forma di Kalman?

$\hat{R}_R = [G_1 \quad F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rank}(\hat{R}_R) = 1 \Rightarrow \Sigma$ non è in forma di Kalman perché (F_{11}, G_1) non è raggiungibile

Qual è la forma di Kalman di $\Sigma = (F, G)$?

$X_R = \text{im } R = \text{im } [G \quad FG \quad F^2 G] = \text{im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F' = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c:cc} 2 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G' = T^{-1} G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Sigma_R = (F_{11}, G_1)$ ragg.

$\Rightarrow (F', G')$ in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_K = (F_K, G_K, H_K, \underset{\overset{\parallel}{J}}{J_K})$$

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G + J$$

$$= H_K(zI - F_K)^{-1}G_K + J_K$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \left(z\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1}G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J = H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J$$

$$= W_R(z)$$ = matrice di trasf. del sottosistema raggiungibile $\Sigma_R = (F_{11}, G_1)$

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\operatorname{rank}[zI - F \;\; G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\operatorname{rank}[zI - F \;\; G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

note

Dim del test PBH

Dimostriamo solo l'implicazione:
" Σ raggiungibile $\Rightarrow$ $PBH(z)$ ha rango n $\forall z \in \mathbb{C}$ "

Assumiamo per assurdo che Σ sia raggiungibile ($\operatorname{rank} R = n$) ma

$$\exists\, \bar{z} \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \operatorname{rank}(PBH(\bar{z})) < n$$

$\operatorname{rank}(PBH(\bar{z})) < n$ implica che $PBH(\bar{z})$ ha righe che sono lin. dipendenti:

$$\exists\, v \neq 0 \in \mathbb{R}^n : \quad v^T PBH(\bar{z}) = 0 \implies v^T [\bar{z}I - F \quad G] = [0 \quad 0]$$

$$\begin{cases} v^T(\bar{z}I - F) = 0 \\ v^T G = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v^T F = \bar{z} v^T \\ v^T G = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ma allora:

$$v^T R = v^T [G \quad FG \quad F^2G \cdots F^{n-1}G]$$

$$= [\underbrace{v^T G}_{0} \quad \underbrace{v^T F}_{} G \quad \underbrace{v^T F^2}_{} G \cdots \underbrace{v^T F^{n-1}}_{} G]$$

$(*)$: $\quad v^TFG = \bar{z} v^T G, \qquad v^T F^2 G = \underbrace{v^TF}_{}FG = \bar{z}\underbrace{v^TF}_{}G = \bar{z}^2 v^T G, \qquad v^TF^{n-1}G = \bar{z}^{n-1} v^T G$

$$= [v^T G \quad \bar{z} v^T G \quad \bar{z}^2 v^T G \cdots \bar{z}^{n-1} v^T G]$$

$$\overset{(*)}{\underset{v^TG = 0}{=}} [0 \quad 0 \quad 0 \cdots 0] = 0$$

$\Longrightarrow$ le righe di R sono lin. dipendenti

$\Longrightarrow$ $\text{rank}(R) < n$ $\Longrightarrow$ Σ non raggiungibile $\rightarrow$ ASSURDO! $\square$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

note

1) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

F triangolare $\longrightarrow$ autovalori di F sono gli elementi sulla diagonale

$\lambda_1 = 0 \qquad \nu_1 = 3$

lin. indip.

$$PBH(\lambda_1) = [\lambda_1 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow \operatorname{rank}(PBH(\lambda_1)) = 3 \implies \Sigma$ raggiungibile

2) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 1, \quad \nu_1 = 3$

lin. indip.

$$PBH(\lambda_1) = [\lambda_1 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow \operatorname{rank}(PBH(\lambda_1)) = 2 < 3 \implies \Sigma$ non raggiungibile