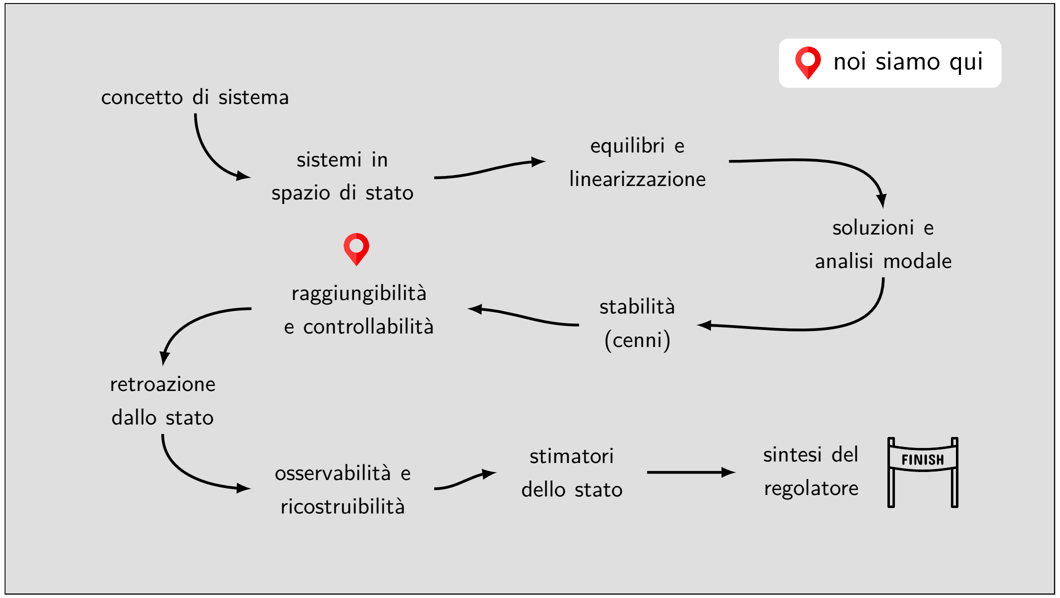
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Controllo a minima energia a t.d.
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità

Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $x^* = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t$, $\eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$

Caso $x_0 \neq 0$: $\quad u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (x^* - F^t x_0)$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u_t' = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

2. Ingresso a **minima "energia"**:

$$u_t^* = \arg\min_{u_t' \in \mathcal{U}_t} \|u_t'\|^2 = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1}(x^* - F^t x_0).$$

3. L'energia minima per raggiungere x^* in t passi è:

$$\|u_t^*\|^2 = (x^*)^\top \mathcal{W}_t^{-1} x^*,$$

dove $\mathcal{W}_t \triangleq \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} F^{k-1} G G^\top (F^\top)^{k-1}$ è detto Gramiano di raggiungibilità in t passi del sistema. Gli autovalori di $\mathcal{W}_t$ quantificano l'energia minima richiesta per raggiungere diversi stati $x(t) = x^*$ del sistema.

Esempio

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \ u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$ $\quad u^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ u^*(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ min. energia

Spazi raggiungibili: interpretazione geometrica

Definizione: Data una $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F-invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$.

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \mathrm{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}, \quad X_R = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R,\ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{w},\ \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\mathrm{im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G},\ G_2 = 0$$

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{R}_K) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix}\right) = k$$

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies$ sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies$ sistema **non** in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z) =$ matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

N.B. Essendo gli autovalori di F_{22} un sottoinsieme degli autovalori di F, il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli z che sono autovalori di F !

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\implies$ raggiungibile

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\implies$ non raggiungibile