

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

 noi siamo qui



## In questa lezione

- ▷ Controllo a minima energia a t.d.
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità

# Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se  $\Sigma$  è raggiungibile in  $t$  passi, come costruire una sequenza di ingresso  $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$  per raggiungere un qualsiasi stato  $x^* \in \mathbb{R}^n$  in  $t$  passi?

- Caso  $x_0 = 0$ :
1.  $x^* = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
  2.  $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t, \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$
  3.  $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$

Caso  $x_0 \neq 0$ :  $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (x^* - F^t x_0)$

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso  $u_t$  generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u}, \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}.$$

2. Ingresso a **minima “energia”**:

$$u_t^* = \arg \min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2 = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (x^* - F^t x_0).$$

3. L'energia minima per raggiungere  $x^*$  in  $t$  passi è:

$$\|u_t^*\|^2 = (x^*)^\top \mathcal{W}_t^{-1} x^*,$$

dove  $\mathcal{W}_t \triangleq \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} F^{k-1} G G^\top (F^\top)^{k-1}$  è detto Gramiano di raggiungibilità in  $t$  passi del sistema. Gli autovalori di  $\mathcal{W}_t$  quantificano l'energia minima richiesta per raggiungere diversi stati  $x(t) = x^*$  del sistema.

## Esempio

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ingressi  $u'(t)$  per raggiungere  $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  da  $x_0 = 0$  in 2 passi?

---

$$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad u^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u^*(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ min. energia}$$

## Spazi raggiungibili: interpretazione geometrica

**Definizione:** Data una  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uno spazio vettoriale  $W$  si dice  $F$ -invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

**Proprietà:** Lo spazio raggiungibile  $X_R$  è  $F$ -invariante e contiene  $\text{im}(G)$ .

# Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$\Sigma$  non raggiungibile  $\implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da “separare” la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$T = [v_1 \ \cdots \ v_k \ \tilde{v}_1 \ \cdots \ \tilde{v}_{n-k}], \quad X_R = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R, w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_w, \quad \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\text{im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G}, \quad G_2 = 0$$

## Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$ : sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$ : sottosistema non raggiungibile

## Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}_K) = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix} \right) = k$$

# Esempi

$$1. F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

sistema **non** in forma di Kalman

## Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$  = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

# Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ( $\text{rank}[zI - F \ G] = n$ ) per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Se  $\Sigma$  non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ( $\text{rank}[zI - F \ G] < n$ ) per tutti e soli gli  $z \in \mathbb{C}$  che sono autovalori di  $F_{22}$  (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ ).

**N.B.** Essendo gli autovalori di  $F_{22}$  un sottoinsieme degli autovalori di  $F$ , il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli  $z$  che sono autovalori di  $F$  !

# Esempi

1.  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies$  raggiungibile

2.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies$  non raggiungibile