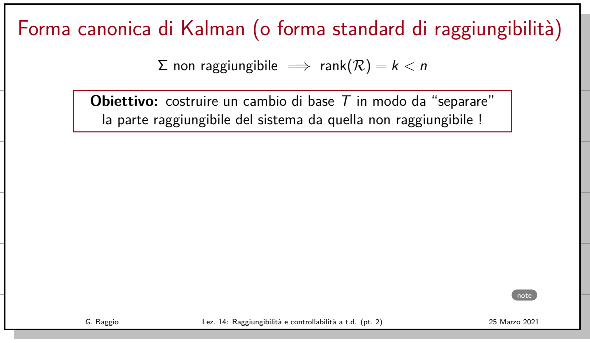

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t) \qquad \Sigma$$

$$\mathcal{R} = [\,G \;\; FG \;\cdots\; F^{n-1}G\,]$$

$$\mathrm{rank}(\mathcal{R}) = k < n \quad (\Sigma \text{ non raggiungibile})$$

$$X_R = \mathrm{im}\,\mathcal{R} = \mathrm{im}\,[\,G \;\; FG \cdots F^{n-1}G\,] = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

dove $v_1, v_2, \dots, v_k$ vettori lin. indip. che sono una base di X_R

Definiamo:

$$T = [\,v_1 \;\; v_2 \;\cdots\; v_k \;\; \tilde{v}_1 \;\; \tilde{v}_2 \;\cdots\; \tilde{v}_{n-k}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. indip. t.c. $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n-k}\} = \mathbb{R}^n$

$$\text{Sia } v \in X_R \xrightarrow{v \text{ espresso nella base } T} v' = T^{-1}v = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\,k \\ \\ \}\,n-k \end{array} = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sia } w = Fv,\; v \in X_R \overset{F\text{-invarianza di } X_R}{\Longrightarrow} w \in X_R \xrightarrow{w \text{ espresso nella base } T} w' = T^{-1}w = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\,k \\ \\ \}\,n-k \end{array} = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sia } F' = T^{-1}FT = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ & \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \end{array}$$

Abbiamo: $\quad w' = T^{-1}w = T^{-1}FTT^{-1}v = F'v'$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} w^{(1)} = F_{11}\, v^{(1)} \\ 0 = F_{21}\, v^{(1)} \end{cases}$$

Abbiamo: $w' = T^{-1} w = T^{-1} F T T^{-1} v = F' v'$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} F_{11} & F_{12} \\ \hdashline F_{21} & F_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} w^{(1)} = F_{11} v^{(1)} \\ 0 = F_{21} v^{(1)} \end{cases}$$

$$F_{21} v^{(1)} = 0 \quad \forall v \in X_R \Longrightarrow F_{21} v^{(1)} = 0 \quad \forall v^{(1)} \in \mathbb{R}^k \Longrightarrow F_{21} = 0$$

Quindi: $F' = \left[\begin{array}{c:c} F_{11} & F_{12} \\ \hdashline 0 & F_{22} \end{array}\right]$

Abbiamo che $\operatorname{im} G \subseteq X_R$

$$G' = T^{-1} G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \hdashline G_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}n-k \end{matrix} \Longrightarrow G_2 = 0 \,, \; G' = \begin{bmatrix} G_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma: \; x(t+1) = F x(t) + G u(t) \xrightarrow{\begin{matrix} k\{ \\ n-k\{ \end{matrix}\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} = T^{-1} x}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} F_{11} & F_{12} \\ \hdashline 0 & F_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Σ in forma di Kalman

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

1) $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right]$ $\quad G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ $\quad \Sigma$ in forma di Kalman?

Bisogna controllare se (F_{11}, G_1) è raggiungibile

$$R^{(1)} = [G_1 \;\; F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \implies \text{rank}(R^{(1)}) = 2 \implies (F_{11}, G_1) \text{ raggiungibile}$$

$\implies \Sigma$ forma di Kalman

2) $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right]$ $\quad G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

$$R^{(1)} = [G_1 \;\; F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \implies \text{rank}(R^{(1)}) = 1$$

$\implies (F_{11}, G_1)$ non raggiungibile

$\implies \Sigma$ NON in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

Σ in forma di Kalman $\quad J_K = 0$

$$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_K = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

[(F_{11}, G_1) è raggiungibile]

$$\begin{aligned} W(z) &= H_K (zI - F_K)^{-1} G_K \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= H_1 (zI - F_{11})^{-1} G_1 = \text{matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile} \end{aligned}$$

N.B.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & * \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

A, C inv.

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \;\; G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \;\; G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

Dimostriamo solo l'implicazione:

"Σ raggiungibile $\Longrightarrow$ $[zI - F \;\; G]$ ha rango n $\forall z \in \mathbb{C}$"

Assumiamo, per assurdo, che Σ sia raggiungibile ma $\exists\, \bar{z} \in \mathbb{C}$ tale che:

$PBH(\bar{z}) = [\bar{z}I - F \;\; G]$ abbia rango non pieno ($< n$)

Allora $PBH(\bar{z})$ ha righe che sono lin. dipendenti, quindi:

$$\exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0 : \quad v^T PBH(\bar{z}) = v^T [\bar{z}I - F \;\vdots\; G] = [0 \;\vdots\; 0]$$

$$\Longrightarrow [\bar{z}v^T - v^T F \;\vdots\; v^T G] = [0 \;\; 0]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bar{z}v^T - v^T F = 0 \longrightarrow v^T F = \bar{z} v^T \\ v^T G = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Ma allora:

$$\underbrace{v^T F}_{\bar{z} v^T} \cdot F = \bar{z}^2 v^T$$

$$v^T \mathcal{R} = v^T [G \;\; FG \;\cdots\; F^{n-1}G] = [v^T G \;\; v^T FG \;\; v^T F^2 G \cdots v^T F^{n-1} G]$$

$$\overset{(*)}{=} [0 \;\; \bar{z} v^T G \;\; \bar{z}^2 v^T G \cdots \bar{z}^{n-1} v^T G]$$

$$\overset{(*)}{=} [0 \;\; 0 \;\; 0 \cdots 0]$$

Quindi le righe di $\mathcal{R}$ sono lin. dipendenti

$\Longrightarrow \text{rank}(\mathcal{R}) < n \Longrightarrow \Sigma$ NON raggiungibile

$\Longrightarrow$ ASSURDO!

Test PBH di raggiungibilità

1) $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile $\iff$ $PBH(z) = [zI - F \;\; G]$ ha rango n $\forall z \in \mathbb{C}$

2) Se Σ è non raggiungibile allora $PBH(z)$ cade di rango per tutti e soli gli $\bar{z} \in \mathbb{C}$ t.c. $\bar{z} \in \lambda(F_{22})$

Notiamo che:

$$\lambda(F) = \lambda(\underbrace{T^{-1} F T}_{\text{cambio di base di Kalman}}) = \lambda(F_K) = \lambda\left(\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}\right) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22})$$

$$\lambda(F_{22}) \subseteq \lambda(F)$$

Quindi per il punto 2) del teorema del test PBH possiamo valutare $PBH(z)$ solo per gli $z \in \lambda(F)$!

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

note

Verificare la raggiungibilità di (F, G) usando il test PBH

1) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

F triangolare $\Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \nu_1 = 3$

$$PBH(z) = [zI - F \quad G] = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PBH(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(PBH(0)) = 3 = n$

$\Longrightarrow \Sigma$ raggiungibile

2) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Autovalori F: $\lambda_1 = 1 \quad \nu_1 = 3$

$$PBH(1) = [I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(PBH(1)) = 2 < 3 = n$

$\Longrightarrow \Sigma$ non raggiungibile

($\lambda_1 = 1$ è l'autovalore non ragg.)

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

note

Determinare controllabilità.

1) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\Sigma = (F, G)$ controllabile $\iff \operatorname{im} F^2 \subseteq \operatorname{im} R$

$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \implies \operatorname{rank} R = 1 \;\; \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies X_R = \operatorname{im} R = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Σ non raggiungibile

$F^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{im} F^2 = \begin{cases} \{0\} & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0 \\ \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0 \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0 \end{cases}$$

(first two cases) $\operatorname{im} F^2 \subseteq X_R \implies \Sigma$ controllabile

(last two cases) $\operatorname{im} F^2 \not\subseteq X_R \implies \Sigma$ non controllabile

2) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \operatorname{rank}(R) = 2 \implies \Sigma$ raggiungibile

$\implies \Sigma$ controllabile

3) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Spazi controllabili e l'indice di controllabilità?

Σ raggiungibile? Usiamo test PBH

Calcolo autovalori di F: $\lambda_1 = 0$ $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\nu_2 = 1$

$PBH(\lambda_1) = PBH(0) = [-F \ \ G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\operatorname{rank}(PBH(0)) = 2 < 3$

$\Downarrow$

Σ non è ragg.

($\lambda_1 = 0$ è autov. non ragg.)

$$X_c(1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Fx \in \operatorname{im} \overset{G}{\overset{\shortparallel}{R_1}}\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^3$$

$$X_c(2) = \{x \in \mathbb{R}^3 : F^2 x \in \operatorname{im} R_2\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{im}[G \ \ FG] \right\}$$

$$X_c(2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \; F^2 x \in \operatorname{im} R_2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{im} \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$\Longrightarrow$ Σ controllabile in 2 passi

(indice di controllabilità $i = 2$)

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR}\end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x,\quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ 0 & F_{22}\end{bmatrix},\quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix}G_1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ 0 & F_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}G_1\\ 0\end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^t = 0,\ t \geq \bar{t} \Leftrightarrow F_{22}$ nilpotente (autovalori di $F_{22} = 0$)
2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile
3. Σ **reversibile** ($= F$ invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

note

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\underset{\text{base di Kalman}}{\exists T} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ 0 & F_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}G_1\\ 0\end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{cases} x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1 u(t) \longrightarrow \Sigma_R \text{ sottosistema raggiungibile} \\ x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t) \longrightarrow \Sigma_{NR} \text{ sottosistema non raggiungibile}\end{cases}$$

Σ_R raggiungibile: $x_R(t) = \underset{(G_1,\,F_{11})\ \uparrow\ + R_t^{(1)} u_t}{F_{11}^t x_R(0)} + \overbrace{\begin{bmatrix} F_{12} & F_{11}F_{12} & \cdots & F_{11}^{t-1}F_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{NR}(t-1) \\ \vdots \\ x_{NR}(1) \\ x_{NR}(0)\end{bmatrix}}^{\bar{x}_{NR}}$

$$\overset{0}{\underset{\tilde{x}}{\underbrace{\overset{\shortparallel}{x_R(t) - F_{11}^t x_R(0) - \bar{x}_{NR}}}}} = R_t^{(1)} u_t$$

$\implies \exists u_t$ t.c. $x_R(t) = 0$ per $t \leq n$ $\forall x_R(0), x_{NR}(0)$

$\implies \Sigma_R$ é controllabile

Σ_{NR} non raggiungibile, ma può essere controllabile?

$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$ controllabile se $\exists \bar{t}$ t.c. $x_{NR}(t) = 0$ $\underset{\forall t \geq \bar{t}}{\forall x_{NR}(0)}$

$$\Updownarrow$$

$$F_{22}^t = 0 \quad \forall t \geq \bar{t}$$

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t \, x_{NR}(0)$$ controllabile se $\exists\, \bar{t}$ t.c. $x_{NR}(t) = 0 \quad \forall t \geq \bar{t} \quad \forall x_{NR}(0)$

$$\Updownarrow$$

$F_{22}^t = 0 \quad \forall t \geq \bar{t}$ (F_{22} è nilpotente)

$$\Updownarrow$$

modi di Σ_{NR} sono convergenti a zero in tempo finito

$$\Updownarrow$$

tutti gli autovalori di F_{22} sono nulli

Quindi:

Σ è controllabile $\Longleftrightarrow$ autovalori di F_{22} sono tutti nulli!

<u>Osservazioni</u>:

1) Se $0 \notin \lambda(F_{22})$ ($\Longrightarrow F_{22}$ è invertibile)

$\Longrightarrow \Sigma$ non controllabile

2) Se F è invertibile $(0 \notin \lambda(F)) \Longrightarrow F_{22}$ invertibile $(0 \notin \lambda(F_{22}))$

$\Longrightarrow \Sigma$ non controllabile

$\downarrow$

F invertibile $\Longrightarrow \Sigma$ reversibile: è possibile ricostruire lo stato $x(0)$ a partire da $x(t)$, $u(t)$, F, G

$$x(t) = F^t x(0) + R_t u_t \longrightarrow x(0) = F^{-t} x(t) - F^{-t} R_t u_t$$