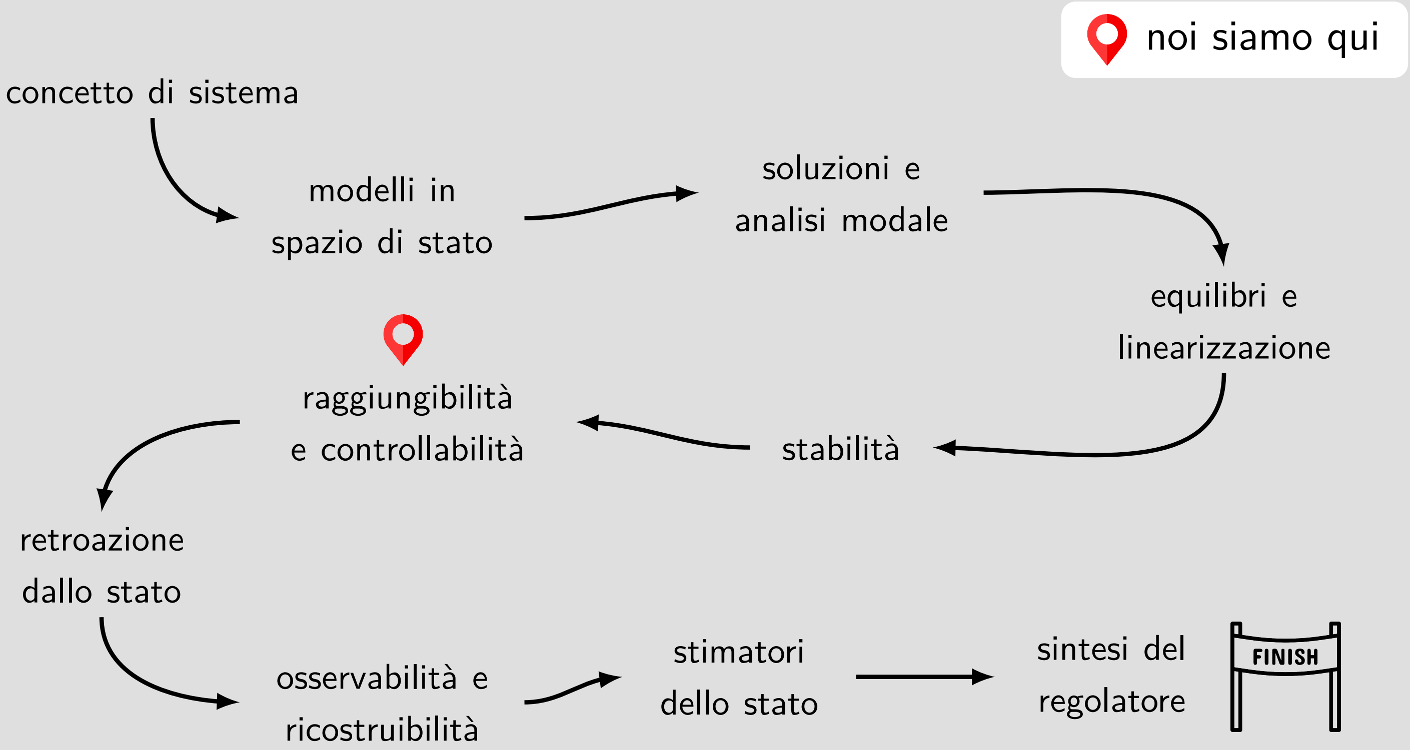
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in spazio di stato

soluzioni e analisi modale

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

Nella scorsa lezione

possibilità di raggiungere un qualsiasi x^* a partire da un fissato x_0 agendo su $u(t)$

possibilità di raggiungere un fissato x^* a partire da un qualsiasi x_0 agendo su $u(t)$

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d. ⟶
- ▷ Controllo a minima energia a t.d.

1) $X_R(t) = \operatorname{im} R_t$

$$R_t = [\,G \;\; FG \;\; \cdots \;\; F^{t-1}G\,]$$

2) $X_R(t) \subseteq X_R(t+1) \quad \forall t \geq 0$

$\exists\, i \leq n \; (= \dim \Sigma)$ t.c.

$$X_R(j) = X_R(i) \quad \forall j \geq i$$

3) Σ ragg. $\iff \operatorname{rank}\big(\underset{R_n}{\underset{\shortparallel}{R}}\big) = n$

In questa lezione

- Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- Test PBH di raggiungibilità
- Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

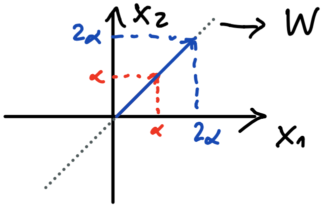
Spazi raggiungibili: interpretazione geometrica

Definizione: Data una $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F-invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

$$W = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = x_2 \right\}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad v \in W : v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \ \alpha \in \mathbb{R} \qquad Fv = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \in W$$



Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F-invariante e contiene $\operatorname{im}(G)$.

$$\forall v \in X_R \implies Fv \in X_R$$

$$\operatorname{im} G \subseteq X_R \qquad \left(X_R = \operatorname{im} \left[G \ FG \cdots F^{n-1}G \right] \right)$$

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

note

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile } \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}, \quad X_R = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R,\ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{w},\ \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

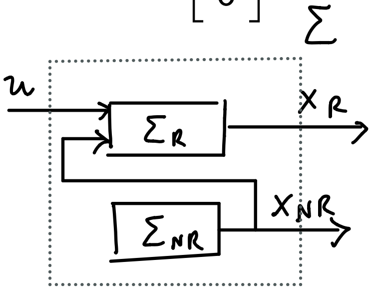
$$\text{im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G},\ G_2 = 0$$

note

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$



$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1 u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_K = \begin{bmatrix} G_K & F_K G_K & \cdots & F_K^{n-1} G_K \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & F_{11}^2 G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1} G_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}^K = \begin{bmatrix} F_{11}^k & * \\ 0 & F_{22}^k \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array}$$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{R}_K) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix}\right) = k$$

$$\overset{!}{=} \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{k-1}G_1 \end{bmatrix}\right)$$

↳ R del Σ raggiungibile

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

note

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ $\Longrightarrow$ sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ $\Longrightarrow$ sistema **non** in forma di Kalman

note

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \left.\begin{bmatrix} \overbrace{H_1}^{k} & \overbrace{H_2}^{n-k} \end{bmatrix}\right\} p$$

note

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z) =$ matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

note

In questa lezione

- Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- Test PBH di raggiungibilità
- Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$PBH(z) = \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

$\downarrow$

autovalori "non ragg."

note

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

N.B. Essendo gli autovalori di F_{22} un sottoinsieme degli autovalori di F, il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli z che sono autovalori di F !

note

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

note

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow$ raggiungibile

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow$ non raggiungibile

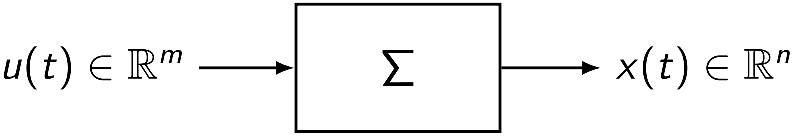
note

In questa lezione

- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$



$u(t) \in \mathbb{R}^m$

Σ

$x(t) \in \mathbb{R}^n$

$$x^* = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

a zero

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t ($=$ in t passi) allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Spazio controllabile

$X_C(t)$ = spazio controllabile in t passi $= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F^t x \in \mathrm{im}(\mathcal{R}_t)\}$

$$x \in X_c(t) \implies \exists\, u_t \ \text{t.c.} \quad 0 = x(t) = F^t x + R_t u_t$$

$$\implies \exists\, u_t \ \text{t.c.} \quad -F^t x = R_t u_t$$

$$\implies F^t x \in \mathrm{im}(R_t)$$

$$\implies X_c(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \mathrm{im}(R_t)\}$$

Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F^t x \in \operatorname{im}(\mathcal{R}_t)\}$$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \cdots \qquad [X_c(t) \subseteq X_c(t+1),\ t \geq 0]$$

↱ dim. Σ

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di controllabilità}$$

$$X_C \triangleq X_C(i) = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \operatorname{im}(F^n) \subseteq \operatorname{im}(\mathcal{R}) = X_R}$$

$$X_c(t) = \{ x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \operatorname{im} \mathcal{R}_t \}$$

$$X_c = X_c(n) = \{ x \in \mathbb{R}^n : F^n x \in \operatorname{im} \overset{X_R}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{R}}} \}$$

$$\operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} \mathcal{R} = X_R \implies \forall x \in \mathbb{R}^n,\ F^n x \in \operatorname{im} F^n \implies F^n x \in X_R$$

$$\Sigma \text{ controllabile}$$

$$\operatorname{im} F^n \not\subseteq \operatorname{im} \mathcal{R} = X_R \implies \exists\, \bar{x} \text{ t.c. } F^n \bar{x} \notin \operatorname{im} \mathcal{R} = X_R$$

$$\implies \Sigma \text{ non è controllabile}$$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \operatorname{im}(F^n) \subseteq \operatorname{im}(\mathcal{R}) = X_R}$$

$$\operatorname{im}(F^n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

↑

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

↓

$$F = 0 \implies \operatorname{im} F^n = \{0\} \subseteq X_R$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

note

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$
ma controllabile se $\alpha_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ raggiungibile e quindi controllabile

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile
ma controllabile (in 2 passi)

note

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^t = 0,\ t \geq \bar{t} \Leftrightarrow F_{22}$ nilpotente (autovalori di $F_{22} = 0$)

2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile

3. Σ **reversibile** ($= F$ invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

note

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\mathrm{PBH}(z) = \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\operatorname{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

Se PBH(z) cade di rango $\overset{\text{solo}}{\vee}$ in $z = 0$ $\implies$ l'unico autovalore non ragg. è 0

$\implies$ l'unico autovalore di F_{22} è 0

$\implies$ Σ controllabile

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F !

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

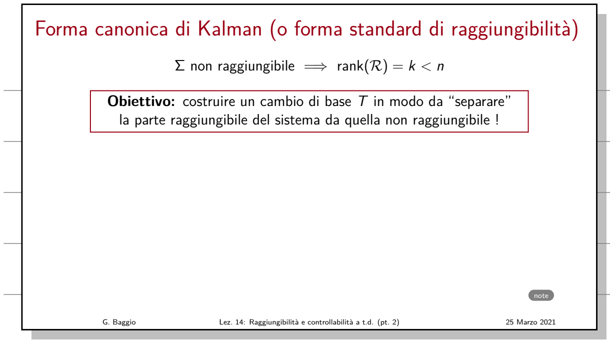
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it
🌍 baggiogi.github.io



Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

Σ non raggiungibile $\implies$ $\text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

note

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t) \qquad \Sigma$$

$$R = [G \;\; FG \;\; \cdots \;\; F^{n-1}G]$$

$$\text{rank}(R) = k < n \quad (\Sigma \text{ non raggiungibile})$$

$$X_R = \text{im}\, R = \text{im}\, [G \;\; FG \cdots F^{n-1}G] = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

dove $v_1, v_2, \dots, v_k$ vettori lin. indip. che sono una base di X_R

Definiamo:

$$T = [v_1 \;\; v_2 \;\cdots\; v_k \;\; \tilde{v}_1 \;\; \tilde{v}_2 \;\cdots\; \tilde{v}_{n-k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. indip. t.c. $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n-k}\} = \mathbb{R}^n$

$$\text{Sia } v \in X_R \xrightarrow{v \text{ espresso nella base } T} v' = T^{-1}v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-k \end{matrix} = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sia } w = Fv,\; v \in X_R \xRightarrow{F\text{-invarianza di } X_R} w \in X_R \xrightarrow{w \text{ espresso nella base } T} w' = T^{-1}w = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-k \end{matrix} = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sia } F' = T^{-1}FT = \begin{array}{cc|c} k & n-k & \\ F_{11} & F_{12} & k \\ F_{21} & F_{22} & n-k \end{array}$$

$$\text{Abbiamo: } \quad w' = T^{-1}w = T^{-1}FTT^{-1}v = F'v'$$

$$\implies \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} w^{(1)} = F_{11} v^{(1)} \\ 0 = F_{21} v^{(1)} \end{cases}$$

Abbiamo: $w' = T^{-1}w = T^{-1}FTT^{-1}v = F'v'$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} F_{11} & F_{12} \\ \hdashline F_{21} & F_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} w^{(1)} = F_{11} v^{(1)} \\ 0 = F_{21} v^{(1)} \end{cases}$$

$$F_{21} v^{(1)} = 0 \quad \forall v \in X_R \Longrightarrow F_{21} v^{(1)} = 0 \quad \forall v^{(1)} \in \mathbb{R}^k \Longrightarrow F_{21} = 0$$

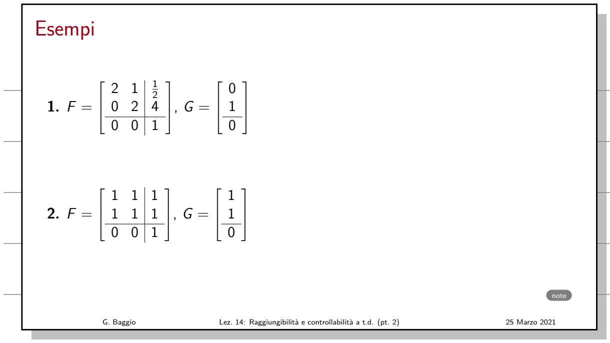
Quindi: $F' = \left[\begin{array}{c:c} F_{11} & F_{12} \\ \hdashline 0 & F_{22} \end{array}\right]$

Abbiamo che $\operatorname{im} G \subseteq X_R$

$$G' = T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \hdashline G_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}n-k \end{matrix} \Longrightarrow G_2 = 0 \ , \ G' = \begin{bmatrix} G_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma : \ x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{\begin{matrix} k\{ \\ n-k\{ \end{matrix} \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} = T^{-1}x}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} F_{11} & F_{12} \\ \hdashline 0 & F_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad \Sigma \text{ in forma di Kalman}$$



Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

note

G. Baggio Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2) 25 Marzo 2021

1) $$F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right] \qquad G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Σ in forma di Kalman?

Bisogna controllare se (F_{11}, G_1) è raggiungibile

$$R^{(1)} = [G_1 \quad F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{rank}(R^{(1)}) = 2 \Longrightarrow (F_{11}, G_1) \text{ raggiungibile}$$

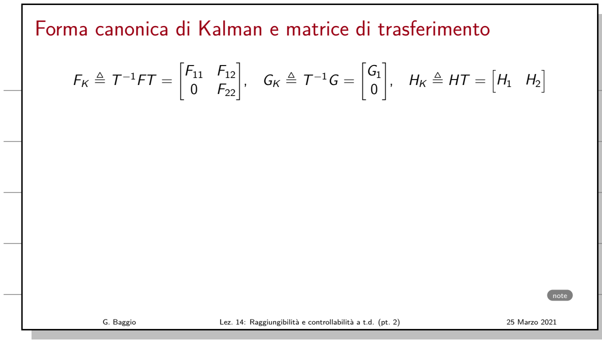
$\Longrightarrow$ Σ forma di Kalman

2) $$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right] \qquad G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$R^{(1)} = [G_1 \quad F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{rank}(R^{(1)}) = 1$$

$\Longrightarrow$ (F_{11}, G_1) non raggiungibile

$\Longrightarrow$ Σ NON in forma di Kalman



Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

note

G. Baggio Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2) 25 Marzo 2021

Σ in forma di Kalman $J_K = 0$

$$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_K = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

[(F_{11}, G_1) è raggiungibile]

$$W(z) = H_K(zI - F_K)^{-1} G_K$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

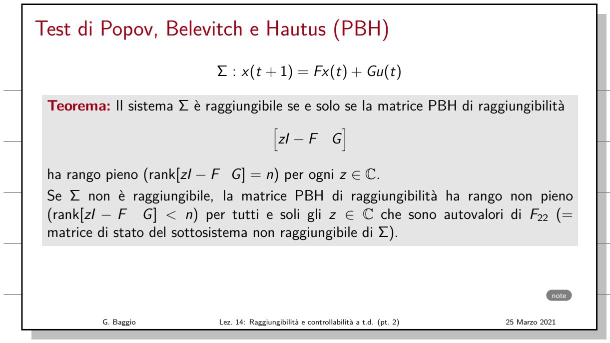
$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= H_1 (zI - F_{11})^{-1} G_1$$ = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile

N.B.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & * \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

A, C inv.



Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

note

G. Baggio   Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2)   25 Marzo 2021

Dimostriamo solo l'implicazione:

"Σ raggiungibile $\Longrightarrow [zI - F \quad G]$ ha rango n" $\forall z \in \mathbb{C}$

Assumiamo, per assurdo, che Σ sia raggiungibile ma $\exists\, \bar{z} \in \mathbb{C}$ tale che:

$$PBH(\bar{z}) = [\bar{z}I - F \quad G] \text{ abbia rango non pieno } (< n)$$

Allora $PBH(\bar{z})$ ha righe che sono lin. dipendenti, quindi:

$$\exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0 : \quad v^T PBH(\bar{z}) = v^T [\bar{z}I - F \;\vdots\; G] = [0 \;\vdots\; 0]$$

$$\Longrightarrow [\bar{z}v^T - v^T F \;\vdots\; v^T G] = [0 \quad 0]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bar{z}v^T - v^T F = 0 \longrightarrow v^T F = \bar{z} v^T \\ v^T G = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Ma allora:

$$\overset{\bar{z}v^T \cdot F}{\overbrace{v^T F}} \cdot F = \bar{z}^2 v^T$$

$$v^T R = v^T [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G] = [v^T G \quad v^T F G \quad v^T F^2 G \cdots \quad v^T F^{n-1} G]$$

$$\overset{(*)}{=} [0 \quad \bar{z} v^T G \quad \bar{z}^2 v^T G \cdots \quad \bar{z}^{n-1} v^T G]$$

$$\overset{(*)}{=} [0 \quad 0 \quad 0 \cdots \quad 0]$$

Quindi le righe di R sono lin. dipendenti

$\Longrightarrow \text{rank}(R) < n \Longrightarrow \Sigma$ NON raggiungibile

$\Longrightarrow$ ASSURDO!

Test PBH di raggiungibilità

1) $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile $\iff$ $PBH(z) = [zI - F \;\; G]$ ha rango n $\forall z \in \mathbb{C}$

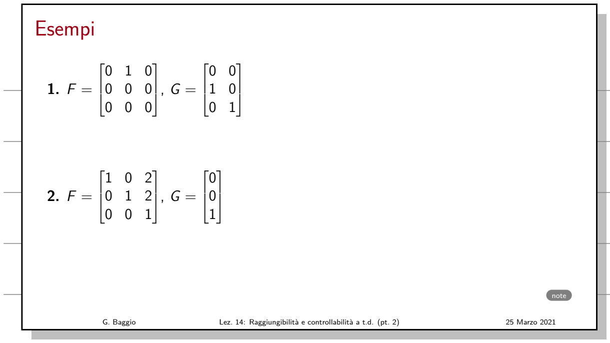
2) Se Σ è non raggiungibile allora $PBH(z)$ cade di rango per tutti e soli gli $\bar{z} \in \mathbb{C}$ t.c. $\bar{z} \in \lambda(F_{22})$

Notiamo che:

$$\lambda(F) = \lambda(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cambio di} \\ \text{base di Kalman}}}{T^{-1} F T}) = \lambda(F_K) = \lambda\left(\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}\right) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22})$$

$\lambda(F_{22}) \subseteq \lambda(F)$

Quindi per il punto 2) del teorema del test PBH possiamo valutare $PBH(z)$ solo per gli $z \in \lambda(F)$!



Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

note

G. Baggio Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2) 25 Marzo 2021

Verificare la raggiungibilità di (F, G) usando il test PBH

1) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

F triangolare $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 0 \quad \nu_1 = 3$

$$PBH(z) = [zI - F \quad G] = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PBH(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(PBH(0)) = 3 = n$

$\Longrightarrow$ Σ raggiungibile

2) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

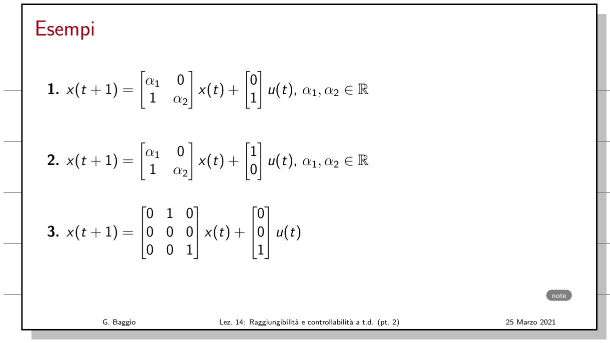
Autovalori F: $\lambda_1 = 1 \quad \nu_1 = 3$

$$PBH(1) = [I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(PBH(1)) = 2 < 3 = n$

$\Longrightarrow$ Σ non raggiungibile

($\lambda_1 = 1$ è l'autovalore non ragg.)



Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 1 & \alpha_2\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 1 & \alpha_2\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} u(t)$

note

G. Baggio Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2) 25 Marzo 2021

Determinare controllabilità.

1) $F = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 1 & \alpha_2\end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\Sigma = (F, G)$ controllabile $\iff \operatorname{im} F^2 \subseteq \operatorname{im} R$

$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & \alpha_2\end{bmatrix} \implies \operatorname{rank} R = 1 \;\; \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies X_R = \operatorname{im} R = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

Σ non raggiungibile

$$F^2 = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 1 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 1 & \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1^2 & 0\\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2^2\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{im} F^2 = \left\{\begin{array}{ll} \{0\} & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\} & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0 \\ \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}\alpha_1^2\\ \alpha_1\end{bmatrix}\right\} & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0 \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0 \end{array}\right.$$

$\operatorname{im} F^2 \subseteq X_R \Rightarrow \Sigma$ controllabile

$\operatorname{im} F^2 \not\subseteq X_R \implies \Sigma$ non controllabile

2) $F = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 1 & \alpha_2\end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix}1 & \alpha_1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \operatorname{rank}(R) = 2 \implies \Sigma$ raggiungibile

$\implies \Sigma$ controllabile

3) $F=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad G=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Spazi controllabili e l'indice di controllabilità?

Σ raggiungibile? Usiamo test PBH

Calcolo autovalori di F: $\lambda_1=0 \;\; \nu_1=2, \;\; \lambda_2=1, \;\; \nu_2=1$

$$PBH(\lambda_1)=PBH(0)=\begin{bmatrix}-F & G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}(PBH(0))=2<3$

$\Downarrow$

Σ non è ragg.

($\lambda_1=0$ è autov. non ragg.)

$$X_c(1)=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : Fx\in \operatorname{im} \overset{\overset{G}{\shortparallel}}{R_1}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}x_2\\0\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\alpha\end{bmatrix}, \alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}\beta\\0\\\alpha\end{bmatrix}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\neq\mathbb{R}^3$$

$$X_c(2)=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : F^2x\in \operatorname{im} R_2\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in \operatorname{im}\begin{bmatrix}G & FG\end{bmatrix}\right\}$$

$$X_c(2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \; F^2 x \in \operatorname{im} R_2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{im} \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} \right\}$$

$$\downarrow$$

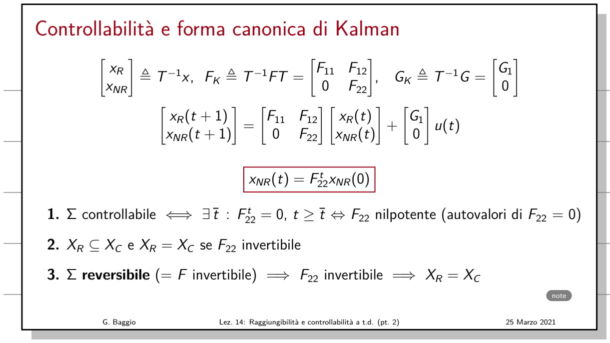
$$\operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$\Longrightarrow$ Σ controllabile in 2 passi

(indice di controllabilità $i = 2$)



Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \;\; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists\, \bar t : F_{22}^t = 0,\, t \geq \bar t \Leftrightarrow F_{22}$ nilpotente (autovalori di $F_{22} = 0$)
2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile
3. Σ **reversibile** ($= F$ invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

note

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\underset{\overset{\downarrow}{\text{base di Kalman}}}{\exists\, T} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{cases} x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t) \longrightarrow \Sigma_R \text{ sottosistema raggiungibile} \\ x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t) \longrightarrow \Sigma_{NR} \text{ sottosistema non raggiungibile} \end{cases}$$

Σ_R raggiungibile:
$$x_R(t) = F_{11}^t x_R(0) + \overbrace{\begin{bmatrix} F_{12} & F_{11}F_{12} & \cdots & F_{11}^{t-1}F_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{NR}(t-1) \\ \vdots \\ x_{NR}(1) \\ x_{NR}(0) \end{bmatrix}}^{\bar x_{NR}}$$

$$+ \overset{\overset{(G_1,\, F_{11})}{\uparrow}}{R_t^{(1)}} u_t$$

$$\underbrace{\overset{\overset{0}{\|}}{x_R(t)} - F_{11}^t x_R(0) - \bar x_{NR}}_{\tilde x} = R_t^{(1)} u_t$$

$\Longrightarrow \exists\, u_t$ t.c. $x_R(t) = 0$ per $t \leq n$ $\forall\, x_R(0), x_{NR}(0)$

$\Longrightarrow \Sigma_R$ é controllabile

Σ_{NR} non raggiungibile, ma può essere controllabile?

$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$ controllabile se $\exists\, \bar t$ t.c. $x_{NR}(t) = 0$ $\forall\, t \geq \bar t$ $\forall\, x_{NR}(0)$

$$\Updownarrow$$

$$F_{22}^t = 0 \quad \forall\, t \geq \bar t$$

$\forall x_{NR}(0)$

$x_{NR}(t) = F_{22}^{t} x_{NR}(0)$ controllabile se $\exists \bar{t}$ t.c. $x_{NR}(t) = 0$ $\forall t \geq \bar{t}$

$$\Updownarrow$$

$F_{22}^{t} = 0$ $\forall t \geq \bar{t}$ (F_{22} é nilpotente)

$$\Updownarrow$$

modi di Σ_{NR} sono convergenti a zero in tempo finito

$$\Updownarrow$$

tutti gli autovalori di F_{22} sono nulli

Quindi:

Σ é controllabile $\Longleftrightarrow$ autovalori di F_{22} sono tutti nulli!

<u>Osservazioni</u>:

1) Se $0 \notin \lambda(F_{22})$ ($\Longrightarrow F_{22}$ é invertibile)

$\Longrightarrow \Sigma$ non controllabile

2) Se F é invertibile $(0 \notin \lambda(F)) \Longrightarrow F_{22}$ invertibile $(0 \notin \lambda(F_{22}))$

$\Longrightarrow \Sigma$ non controllabile

↓

F invertibile $\Longrightarrow \Sigma$ reversibile: é possibile ricostruire lo stato $x(0)$ a partire da $x(t)$, $u(t)$, F, G

$$x(t) = F^{t} x(0) + R_t u_t \longrightarrow x(0) = F^{-t} x(t) - F^{-t} R_t u_t$$