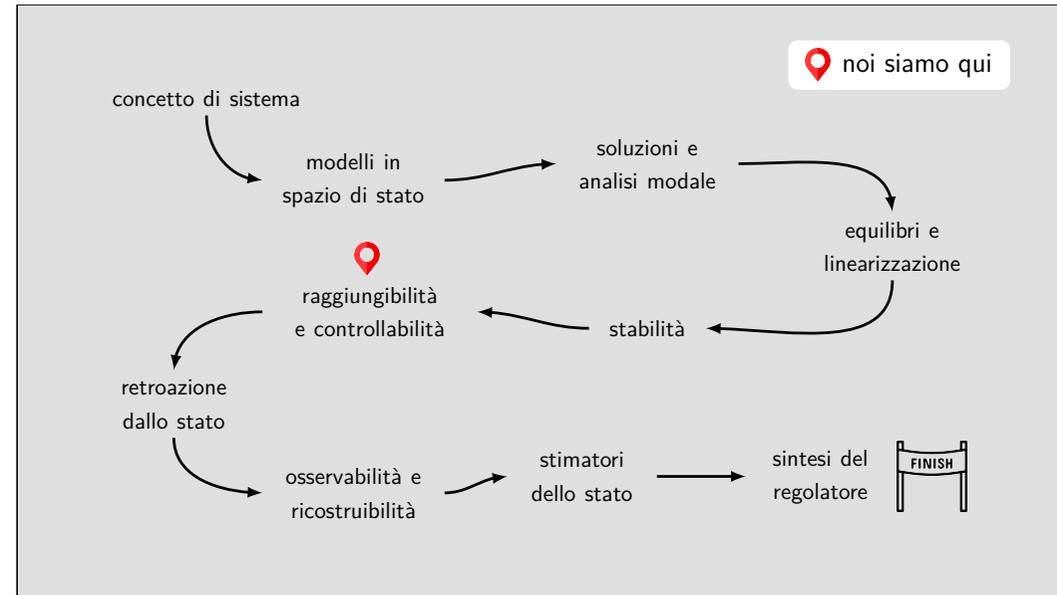


Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica
A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Spazi raggiungibili: interpretazione geometrica

Definizione: Data una $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F -invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F -invariante e contiene $\text{im}(G)$.

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

Σ non raggiungibile $\implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$T = [v_1 \ \cdots \ v_k \ \tilde{v}_1 \ \cdots \ \tilde{v}_{n-k}], \quad X_R = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R, w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_w, \quad \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\text{im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G}, \quad G_2 = 0$$

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}_K) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix} \right) = k$$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$ sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$ sistema **non** in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = [H_1 \quad H_2]$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$ = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

N.B. Essendo gli autovalori di F_{22} un sottoinsieme degli autovalori di F , il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli z che sono autovalori di F !

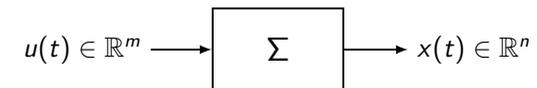
Esempi

$$1. \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{raggiungibile}$$

$$2. \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile}$$

Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$



$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t (= in t passi) allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Spazio controllabile

$X_C(t) =$ spazio controllabile in t passi $= \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{im}(\mathcal{R}_t)\}$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$i =$ indice di controllabilità

$X_C \triangleq X_C(i) =$ (massimo) spazio controllabile

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{im}(F^n) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}) = X_R$$

Σ raggiungibile ($X_R = \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow \Sigma$ controllabile

Σ controllabile $\not\Rightarrow \Sigma$ raggiungibile !!!

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$
ma controllabile se $\alpha_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ raggiungibile e quindi controllabile

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \Rightarrow$ non raggiungibile
ma controllabile (in 2 passi)

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$$

1. Σ controllabile $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^{\bar{t}} = 0, t \geq \bar{t} \iff F_{22}$ nilpotente (autovalori di $F_{22} = 0$)

2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile

3. Σ reversibile (= F invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \ G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F !