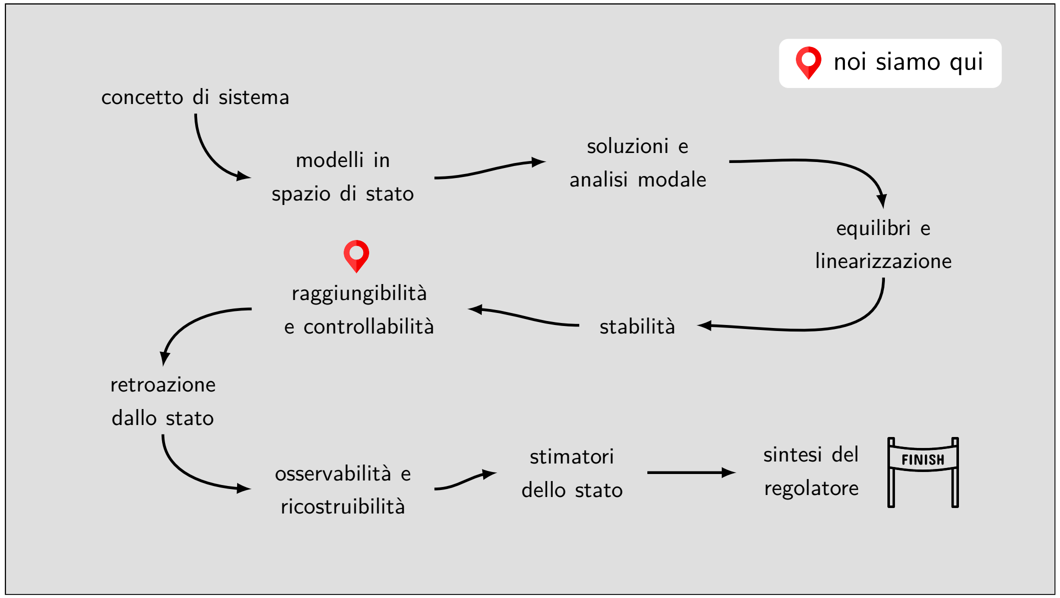
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Spazi raggiungibili: interpretazione geometrica

Definizione: Data una $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F-invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$.

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}, \quad X_R = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R,\ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{w},\ \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\text{im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G},\ G_2 = 0$$

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x,\quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix},\quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1 u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \;\; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{R}_K) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix}\right) = k$$

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies$ sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies$ sistema **non** in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI-F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z) =$ matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}[zI - F \quad G] < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22} (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ).

N.B. Essendo gli autovalori di F_{22} un sottoinsieme degli autovalori di F, il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli z che sono autovalori di F !

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\implies$ raggiungibile

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\implies$ non raggiungibile

Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$\boxed{\text{Insieme di stati } x_0 \text{ controllabili al tempo } t \text{ (= in } t \text{ passi) allo stato } x(t) = 0?}$

$\boxed{\text{Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati } x_0 \in \mathbb{R}^n?}$

Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F^t x \in \text{im}(\mathcal{R}_t)\}$$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di controllabilità}$$

$$X_C \triangleq X_C(i) = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{im}(F^n) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}) = X_R}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$ ma controllabile se $\alpha_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ raggiungibile e quindi controllabile

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$ non raggiungibile ma controllabile (in 2 passi)

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x,\quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix},\quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists\, \bar{t} : F_{22}^t = 0,\ t \geq \bar{t} \Leftrightarrow F_{22}$ nilpotente (autovalori di $F_{22} = 0$)

2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile

3. Σ **reversibile** ($= F$ invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ($\operatorname{rank}[zI - F \quad G] = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F !