Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

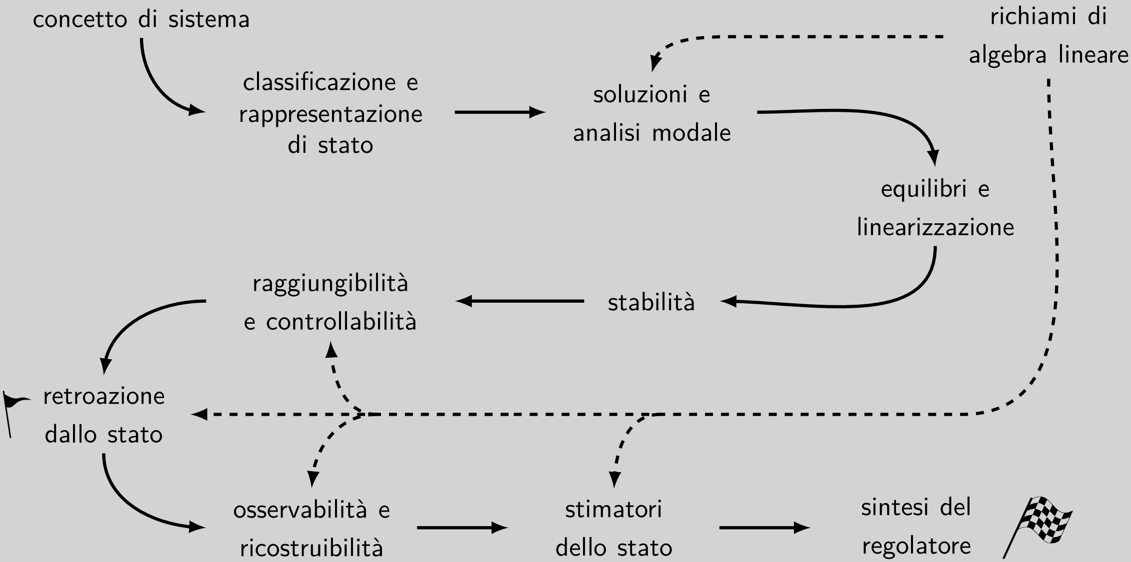
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

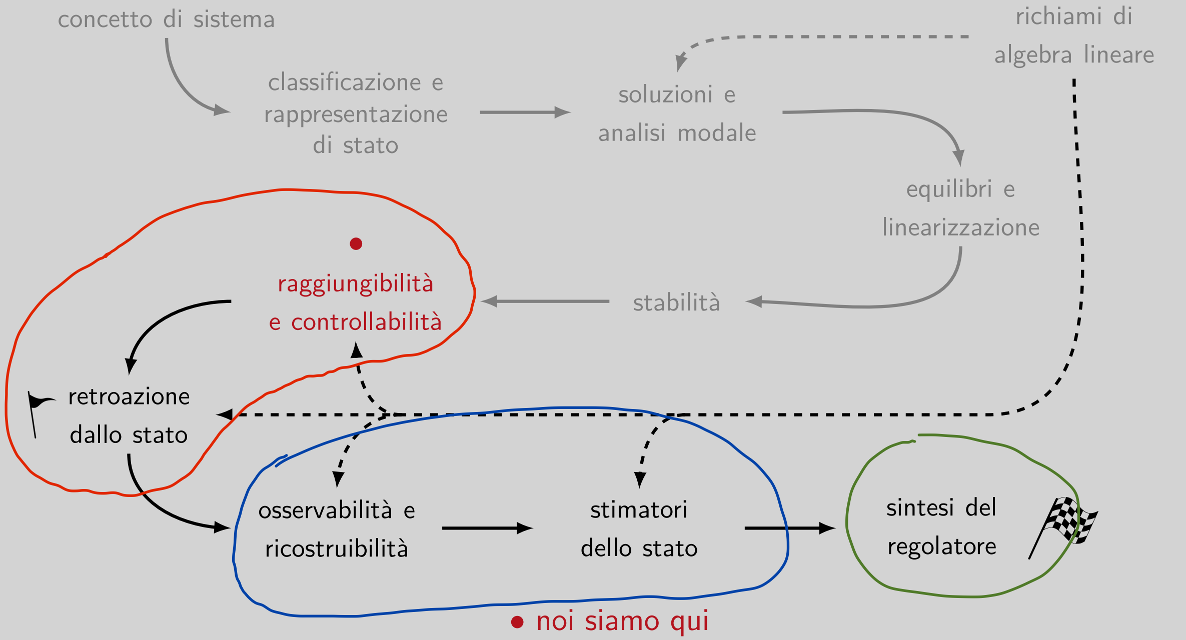
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13 & 14: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo discreto

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
noi siamo qui

In questa lezione

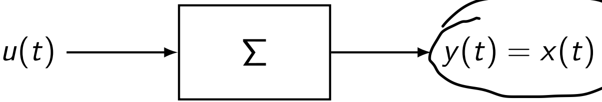
- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$



Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Raggiungibilità = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato $\bar{x}$ a partire da uno stato x_0 **fissato** agendo su $u(t)$

Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

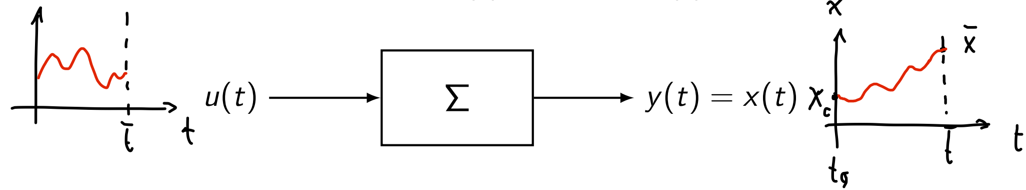
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Raggiungibilità = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato $\bar{x}$ a partire da uno stato x_0 **fissato** agendo su $u(t)$

Controllabilità = possibilità di raggiungere uno stato desiderato x_0 **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato $\bar{x}$ agendo su $u(t)$

Stati e spazi raggiungibili

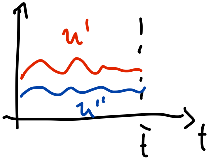
sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$



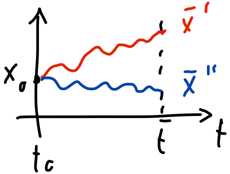
Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(\bar{t}) = \bar{x}$.

Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$



Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(\bar{t}) = \bar{x}$.

Definizione: L'insieme $X_R(\bar{t})$ di tutti gli stati raggiungibili dallo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ è detto spazio raggiungibile al tempo $\bar{t}$.

Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

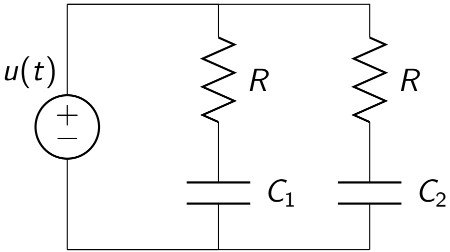
Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(\bar{t}) = \bar{x}$.

Definizione: L'insieme $X_R(\bar{t})$ di tutti gli stati raggiungibili dallo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ è detto spazio raggiungibile al tempo $\bar{t}$.

(tipicamente: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$)

Esempio introduttivo

extra



$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

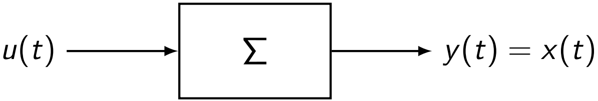
Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0)$:

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t),\ \forall u(t), \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\},\ \forall t \geq 0$$

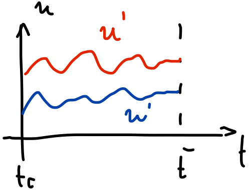
Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$



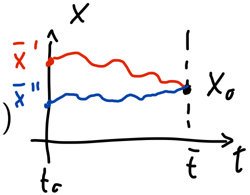
Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice controllabile allo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = \bar{x}$ e $x(\bar{t}) = x_0$.

Stati e spazi controllabili



sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

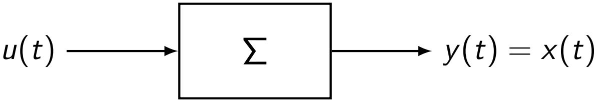


Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice controllabile allo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = \bar{x}$ e $x(\bar{t}) = x_0$.

Definizione: L'insieme $X_C(\bar{t})$ di tutti gli stati controllabili allo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ è detto spazio controllabile al tempo $\bar{t}$.

Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

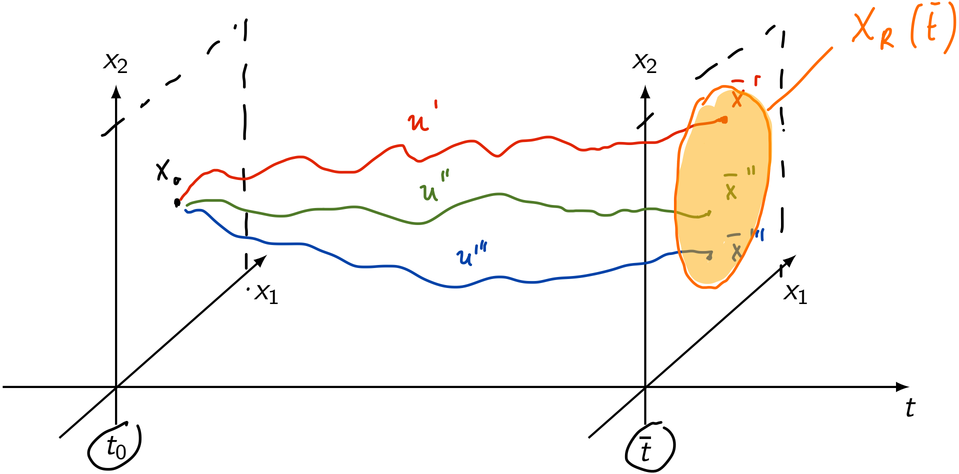


Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice controllabile allo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = \bar{x}$ e $x(\bar{t}) = x_0$.

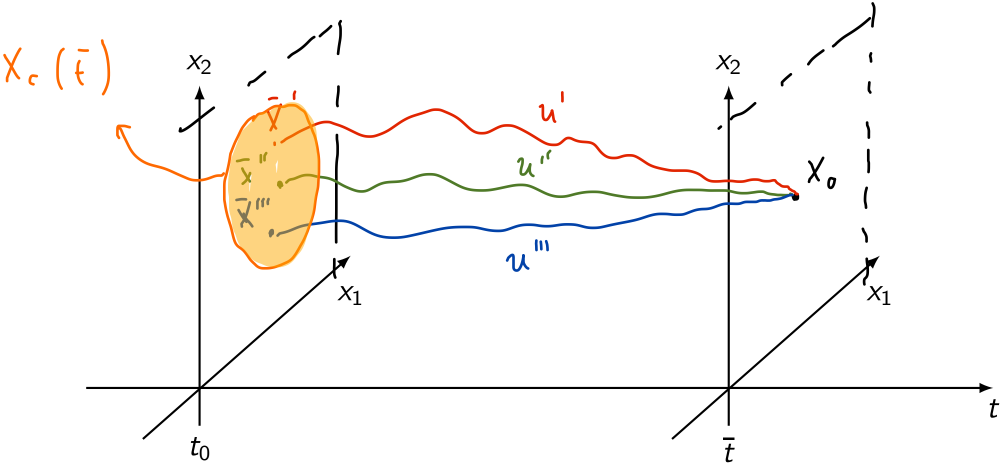
Definizione: L'insieme $X_C(\bar{t})$ di tutti gli stati controllabili allo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ è detto spazio controllabile al tempo $\bar{t}$.

(tipicamente: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$)

Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k)}_{\text{ev. forzata}}$$

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\quad \Sigma \quad} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; \underline{x(0) = 0}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

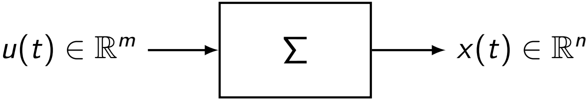
$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$



$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati $\bar{x}$ raggiungibili al tempo t (= in t passi) a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Spazio raggiungibile

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}_t)$$

$$x = R_t u_t$$

$$\mathrm{Im}(R_t) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \exists\, u_t \in \mathbb{R}^{mt} \text{ t.c. } x = R_t u_t \}$$

Spazio raggiungibile

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

Spazio raggiungibile

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di raggiungibilità}$$

$$X_R \triangleq X_R(i) = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Criterio di raggiungibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

Criterio di raggiungibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

Criterio di raggiungibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

$$m = 1: \ \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$$

$$m > 1: \ \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A A^T)$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$ non raggiungibile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$ raggiungibile (in 2 passi)

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \Longrightarrow$ raggiungibile (in 2 passi)

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \; \bar{G} = T^{-1}G$$

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \; \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \cdots & \bar{F}^{n-1}\bar{G} \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{R}}) = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \; \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \cdots & \bar{F}^{n-1}\bar{G} \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\mathrm{rank}(\bar{\mathcal{R}}) = \mathrm{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

Inoltre, se Σ raggiungibile: $\quad \bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top)^{-1}$

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire un ingresso u_t per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire un ingresso u_t per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $\bar{x} = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t$, $\eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire un ingresso u_t per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $\bar{x} = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t$, $\eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$

Caso $x_0 \neq 0$: $\quad u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (\bar{x} - F^t x_0)$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u_t' = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}.$$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

2. Ingresso u_t = ingresso a **minima energia**:

$$u_t = \arg\min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2$$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

2. Ingresso u_t = ingresso a **minima energia**:

$$u_t = \arg\min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2$$

3. Gramiano di raggiungibilità del sistema in t passi:

$$\mathcal{W}_t = \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1} B B^\top (A^\top)^{t-1}.$$

Autovalori di $\mathcal{W}_t$ quantificano l'energia richiesta per controllare il sistema.

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ min. energia

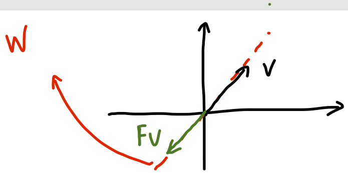
In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Proprietà importante

extra

Definizione: Data una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F-invariante se
$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$



Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{Im}(G)$.

Forma canonica di Kalman

extra

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

Forma canonica di Kalman

extra

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}, \quad X_R = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

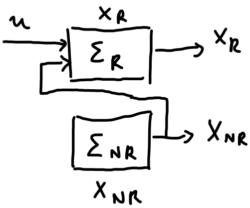
$$\forall v \in X_R,\ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ \underbrace{F_{21}}_{=0} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{w}, \ \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\text{Im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ \underbrace{G_2}_{=0} \end{bmatrix}}_{T^{-1}G}, \ G_2 = 0$$

Forma canonica di Kalman (di raggiungibilità)

$$\begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \begin{bmatrix} x_R \\ \hline x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$



$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1 u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_K & F_K G_K & \cdots & F_K^{n-1} G_K \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array}$$

$$\operatorname{rank}(R_K) = \operatorname{rank}(R)$$

$$\operatorname{rank} R_K = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix} = k$$

$n \to k$

Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{R}_K) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix}\right) = k$$

Esempi

extra

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

.

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

Esempi

extra

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ $\Longrightarrow$ sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ $\Longrightarrow$ sistema **non** in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

extra

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

extra

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z) =$ matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

extra

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$. Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di z che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di Σ.

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

extra

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F \longrightarrow \begin{bmatrix} F_{11} & * \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$. Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di z che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di Σ.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli z che sono autovalori di F!

Test di Jordan

$$\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\ell \end{bmatrix} \qquad G_J = T^{-1} G$$

$$\Sigma : z(t+1) = F_J z(t) + G_J u(t), \; z(0) = z_0$$

Corollario: Il sistema Σ (in forma di Jordan) è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore λ_i di F_J, le righe di G_J in posizione corrispondente alle ultime righe dei miniblocchi di Jordan relativi a λ_i sono linearmente indipendenti.

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right] \qquad G_J = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

$g_2 = [1 \; 0] \quad g_4 = [0 \; 1] \Rightarrow \Sigma$ ragg.

$g_2 = [1 \; 1] \quad g_4 = [2 \; 2] \Rightarrow \Sigma$ non è ragg.

$$[\underset{\substack{\downarrow \\ =1}}{z} I - F_J \mid G_J] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 \end{array}\right]$$

Esempi

extra

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono lin. indip $\Rightarrow$ Σ raggiungibile

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ non sono lin. indip

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$ raggiungibile

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$ non raggiungibile

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$ non raggiungibile

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = \bar{x}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x_0 = x(t) = \underbrace{F^t \bar{x}}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{\text{ev. forzata}} = F^t \bar{x} + \mathcal{R}_t u_t$$

Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = \bar{x}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = F^t \bar{x} + R_t u_t$$

$$F^t \bar{x} = -\underbrace{R_t u_t}_{\mathrm{Im}\, R_t}$$

$$0 = x(t) = F^t \bar{x} + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t \bar{x} + \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati $\bar{x}$ controllabili al tempo t ($=$ in t passi) allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}$?

Spazio controllabile

$F^n x$

$$\downarrow$$

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F^t x \in \operatorname{Im}(\mathcal{R}_t)\}$$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di controllabilità}$$

$$X_C \triangleq X_C(i) = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Criterio di controllabilità

$$X_C = \{ x \in \mathbb{R}^n : F^n x \in \underset{\overset{\parallel}{X_R}}{\mathrm{Im}\, R} \}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile } \iff \operatorname{Im}(F^n) \subseteq \operatorname{Im}(\mathcal{R}) = \underset{\downarrow}{X_R}}$$

$\mathbb{R}^n$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \mathrm{Im}(F^n) \subseteq \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = X_R}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$ non raggiungibile $\forall f_1, f_2$ ma controllabile se $f_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$ raggiungibile e quindi controllabile

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \Longrightarrow$ non raggiungibile ma controllabile (in 2 passi)

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Σ reversibile se $x(0)$ può essere calcolato da $x(t)$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x(t) = F^t x(0) + R_t u_t$

$F^t x(0) = x(t) - R_t u_t$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists\, \bar{t} \;:\; F_{22}^{\bar{t}} = 0 \iff$ autovalori di F_{22} tutti nulli
2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile
3. Σ **reversibile** (F invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F!

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13 & 14: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo discreto

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

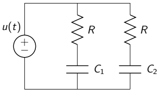
A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio introduttivo

extra



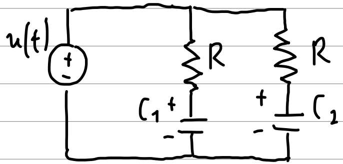
$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0)$:

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \ \forall u(t), \forall t \geq 0$

$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}, \ \forall t \geq 0$

back



$x_1 = v_{C_1}$ $\qquad$ $x_2 = v_{C_2}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{v}_{C_1} = \frac{1}{C_1} i_{C_1} = \frac{1}{C_1} i_R = \frac{1}{C_1}\left(\frac{u - v_{C_1}}{R}\right) = \frac{1}{RC_1}(u - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{v}_{C_2} = \frac{1}{RC_2}(u - x_2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{G} u$$

back

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft} x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)} G\, u(\tau)\, d\tau}_{\text{ev. forzata}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC_1}t} x_{0,1} \\ e^{-\frac{1}{RC_2}t} x_{0,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC_1}(t-\tau)} \frac{1}{RC_1} u(\tau)\, d\tau \\ \int_0^t e^{-\frac{1}{RC_2}(t-\tau)} \frac{1}{RC_2} u(\tau)\, d\tau \end{bmatrix}$$

$C_1 = C_2, \quad x_{0,1} = x_{0,2}$

$x_1(t) = x_2(t)$

$$X_R(t) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1(t) = x_2(t) \right\} \qquad t \geq 0$$

Spazio raggiungibile

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \operatorname{Im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

back

1) $X_R(k) \subseteq X_R(k+1) \quad \forall k$

$$X_R(k) = \operatorname{Im} R_k = \operatorname{Im}\left[G \;\; FG \;\; F^2G \;\cdots\; F^{k-1}G\right] = \operatorname{span}\{g_1,\dots,g_m, Fg_1,\dots,Fg_m,\dots, F^{k-1}g_1,\dots,F^{k-1}g_m\}$$

$$G = [g_1 \; g_2 \cdots g_m]$$

$$X_R(k+1) = \operatorname{Im} R_{k+1} = \operatorname{Im}\left[G \;\; FG \;\; F^2G \;\cdots\; F^kG\right] = \operatorname{span}\{g_1,\dots,g_m,\dots,F^{k-1}g_1,\dots,F^{k-1}g_m, F^kg_1,\dots,F^kg_m\}$$

back

$$\Rightarrow \quad X_R(k) \subseteq X_R(k+1)$$

2) $\exists\, i : \quad X_R(i) = X_R(i+1) = X_R(i+2) = \dots$

- $X_R(n) = X_R(n+1)$

$$X_R(n) = \operatorname{Im} R_n = \operatorname{Im}\left[G \;\; FG \;\cdots\; F^{n-1}G\right]$$

$$= \operatorname{span}\{g_1, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, \dots, F^{n-1}g_1, \dots, F^{n-1}g_m\}$$

$$X_R(n+1) = \operatorname{Im} R_{n+1} = \operatorname{Im}\left[G \;\; FG \;\cdots\; F^{n}G\right]$$

$$= \text{span}\{g_1, \dots, g_m, \dots, F^{n-1}g_1, \dots, F^{n-1}g_m, \underbrace{F^n g_1, \dots, F^n g_m}\}$$

Teorema di Cayley-Hamilton:

$$\Delta_F(F) = 0 \Rightarrow F^n + \alpha_{n-1}F^{n-1} + \alpha_{n-2}F^{n-2} + \dots + \alpha_1 F + \alpha_0 I = 0$$

$$F^n = -\alpha_{n-1}F^{n-1} - \alpha_{n-2}F^{n-2} - \dots - \alpha_0 I$$

$$F^n g_i \in \text{span}\{g_1, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, F^{n-1}g_1, \dots, F^{n-1}g_m\}$$

$$X_R(n+1) = X_R(n)$$

$$\exists\, i: \quad X_R(i) = \underbrace{X_R(i+1) = X_R(i+2)}_{\text{da dim.}} = \cdots$$

$$X_R(i+1) = \operatorname{Im} R_{i+1} = \operatorname{Im}\,[G \;\; FG \;\cdots\; F^i G]$$

$$X_R(i+2) = \operatorname{Im} R_{i+2} = \operatorname{Im}\,[G \;\; FG \;\cdots\; F^i G \;\; F^{i+1} G]$$

$$\operatorname{Im}(F^{i+1} G) \subseteq \operatorname{Im} R_{i+1} = X_R(i+1)$$

$$G = g \in \mathbb{R}^n \quad (m=1)$$

$$F^{i+1} g = F F^i g \overset{X_R(i+1) = X_R(i)}{=} F\left(\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j F^j g\right)$$

$$= \underbrace{\alpha_{i-1} F^{i} g}_{\in X_R(i+1) \overset{\shortparallel}{} X_R(i)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{i-2} \alpha_j F^{j+1} g}_{\in X_R(i)}$$

$$F^{i+1} g \in X_R(i) = X_R(i+1)$$

$$X_R(i+2) = X_R(i+1) = X_R(i)$$

back

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

back

1) $$x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix}}^{F} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{G} u(t) \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$R = R_2 = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(R) = 1$
$\det(R) = 0$ $\Rightarrow$ sistema NON è ragg. $\forall f_1, f_2$

2) $$x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$R = R_2 = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(R) = 2 \quad \forall f_1, f_2$
$\det(R) = 1$

sistema è raggiungibile $\forall f_1, f_2$

3) $x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G} u(t)$

$$R = R_3 = [G \quad FG \quad F^2G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(R) = 3$ sistema è ragg. in 2 passi

$X_R(1) = \text{Im}\, G = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$X_R(2) = \mathrm{Im}\,[G \quad FG] = \mathbb{R}^3$$

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT,\ \bar{G} = T^{-1}G$$

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$z = T^{-1}x$$

$$z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT \qquad \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{R} = [\bar{G} \quad \bar{F}\bar{G} \quad \cdots \quad \bar{F}^{n-1}\bar{G}] = [T^{-1}G \quad T^{-1}F\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G \quad \cdots \quad T^{-1}F^{n}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G]$$

$$= T^{-1}[G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G]$$

$$= T^{-1}R$$

$\mathrm{rank}(\bar{R}) = \mathrm{rank}(R)$

Sistema sia raggiungibile $\left(\det(RR^T) \neq 0 \quad \det(\bar{R}R^T) \neq 0\right)$

$$\bar{R}R^T = T^{-1}RR^T$$

$$\hookrightarrow T^{-1} = \bar{R}R^T(RR^T)^{-1} \Rightarrow T = RR^T(\bar{R}R^T)^{-1}$$

Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire un ingresso u_t per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

back

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t)$$

sistema ragg. in t passi

$$\text{rank}(R_t) = n \iff \det(R_t R_t^T) \neq 0$$

1) $\boxed{x_0 = 0}$

$$\bar{x} = x(t) = R_t\, u_t \qquad \left(\text{se } R_t \ n \times n:\ u_t = R_t^{-1}\bar{x}\right)$$

$$u_t = R_t^T \eta_t \qquad \eta_t \in \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x} = R_t R_t^T \eta_t$$

$$\eta_t = (R_t R_t^T)^{-1}\bar{x}$$

back

$$\boxed{u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} \bar{x}}$$

$$u'_t = u_t + \bar{u} \quad , \quad \bar{u} \in \operatorname{Ker} R_t$$

$$R_t u'_t = R_t (u_t + \bar{u}) = \underbrace{R_t u_t}_{\bar{x}} + \underbrace{R_t \bar{u}}_{0} = \bar{x}$$

2) $\boxed{x_0 \neq 0}$

$$\bar{x} = x(t) = F^t x_0 + R_t u_t$$

$$\bar{x} - F^t x_0 = R_t u_t$$

back

$$u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} (\bar{x} - F^t x_0)$$

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad t = 2$$

$$u_2 = R_2^T (R_2 R_2^T)^{-1} \bar{x}$$

$$R_2 = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 R_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\} u(1) \\ \left.\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\} u(0) \end{bmatrix} \qquad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

back

$$u_2' = u_2 + \bar{u} \qquad \bar{u} \in \operatorname{Ker} R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proprietà importante

extra

Definizione: Data una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F-invariante se
$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{Im}(G)$.

back

$$X_R = \mathrm{Im}\, R = \mathrm{Im}\,[G \;\; FG \; \cdots \; F^{n-1}G]$$

$$G = [g_1 \cdots g_m]$$

$$v \in X_R : \qquad v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} F^i g_j$$

$$Fv : \qquad Fv = F \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} F^i g_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \alpha_{n-1\,j} F^n g_j}_{\text{Cayley-Hamilton}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_{ij} F^{i+1} g_j}_{\in X_R}$$

$\in X_R$

$$F^n g_j \in \mathrm{span}\{g_j, Fg_j, \dots, F^{n-1} g_j\}$$

back

$Fv \in X_R \xRightarrow{\forall v \in X_R} X_R$ è F-invariante

$X_R \in \mathrm{Im}\, G$

Forma canonica di Kalman

extra

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

back

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$$

$$\text{rank}(R) = K < n \implies \dim(X_R) = K$$

$$X_R = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \quad v_i \text{ lin. indip.}$$

$$T = [v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-k}] \quad \{v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-k}\} \text{ base di } \mathbb{R}^n$$

$$v \in X_R \xrightarrow{\text{nella base } T} \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k\end{matrix}\right\} v^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

back

$$w = F v\,,\ v \in X_R \implies w \in X_R \xrightarrow{\text{nella base } T} w = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_k\end{matrix}}\right\} w^{(1)} \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}} \end{matrix}$$

$$\bar{F} = T^{-1} F T = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right] \qquad F_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k} \qquad F_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$$

$$w = \bar{F} v \implies \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \implies 0 = F_{21} v^{(1)}$$

$v \in X_R$

$\forall v \in X_R$

$$\implies F_{21} = 0$$

$$\bar{F} = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right]$$

back

$$\bar{G} = T^{-1} G = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline G_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array}$$

$$\operatorname{Im} G \in X_R \implies \bar{G} = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array} \right]$$

Esempi

extra

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

back

1) $F = \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{2 \quad 1}^{F_{11}} & & 1/2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \Big\} G_1$

(F_{11}, G_1) è raggiungibile ?

$R_2 = [G_1 \quad F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ rank$(R_2) = 2 \Rightarrow$ raggiung.

$\Rightarrow$ sistema è in forma di Kalman

2) $$\bar{F} = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{F_{11}} \qquad \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad \bar{G} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} G_1 \\ \\ \end{array}$$

(F_{11}, G_1) è raggiungibile?

$$R = [\, G_1 \quad F_{11} G_1 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}(R) = 1$

$\det(R) = 0$

$\Rightarrow$ (F_{11}, G_1) NON è raggiungibile

$\Rightarrow$ sistema NON è in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

extra

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

back

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t)$$
$$y(t) = H\,x(t)$$

$$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H_K = HT = [\underbrace{H_1}_{k} \mid \underbrace{H_2}_{n-k}]$$

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G = H_K(zI - F_K)^{-1}G_K$$

$$= [H_1 \mid H_2] \left[\begin{array}{c|c} zI - F_{11} & -F_{12} \\ \hline 0 & zI - F_{22} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

back

$$= \left[\begin{array}{c|c} H_1 & H_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ \hline 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$= H_1 \, (zI - F_{11})^{-1} \, G_1$$

matrice di trasferimento del sottosistema ragg. !!!

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

extra

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$. Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di z che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di Σ.

back

1) "Σ raggiungibile $\Rightarrow [zI - F \mid G]$ ha rango pieno $\forall z \in \mathbb{C}$"

Per assurdo, Σ è raggiungibile ma $[zI - F \mid G]$ ha rango non pieno per $z = \bar{z} \in \mathbb{C}$

$[\bar{z}I - F \mid G]$ ha rango non pieno, allora

$\exists\, v \in \mathbb{R}^n$: $v^T [\bar{z}I - F \mid G] = \underbrace{[0 \cdots 0]}_{m+n}$

$$[\bar{z}v^T - v^T F \mid v^T G] = [0 \cdots 0]$$

$$\begin{cases} \bar{z}\, v^T - v^T F = 0 \Rightarrow v^T F = \bar{z}\, v^T \\ v^T G = 0 \end{cases}$$

$$v^T R = v^T \left[G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1} G \right]$$

$$\overset{!}{=} \left[v^T G \quad v^T F G \quad v^T F^2 G \quad \cdots \quad v^T F^{n-1} G \right]$$

$$\overset{!}{=} \left[0 \quad \bar{z}\, \underbrace{v^T G}_{0} \quad \bar{z}^2 \underbrace{v^T G}_{0} \quad \cdots \quad \bar{z}^{n-1} \underbrace{v^T G}_{0} \right] = \left[0 \cdots 0 \right]$$

$\Rightarrow$ R non è di rango pieno $\Rightarrow$ Σ NON è raggiungibile

$\Rightarrow$ ASSURDO!

back

" Σ non è ragg. $\Rightarrow \exists\, \bar{z} \in \mathbb{C}$ t.c. $[\bar{z} I - F \mid G]$ non ha rango pieno"

$$F_K = T^{-1} F T = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right] \qquad G_K = T^{-1} G = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$[zI - F_K \mid G_K] = [zI - T^{-1} F T \mid T^{-1} G]$$

$$= \underbrace{T^{-1}}_{\text{inv}} [zI - F \mid G] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} T & \\ \hline & \underbrace{I}_{m \times m} \end{array}\right]}_{\text{inv}}$$

$$\operatorname{rank}[zI - F_K \mid G_K] = \operatorname{rank}[zI - F \mid G]$$

back

Possiamo assumere che il sistema sia in forma di Kalman:

$$[zI - F \mid G] = \left[\begin{array}{cc|c} zI - F_{11} & -F_{12} & G_1 \\ 0 & zI - F_{22} & 0 \end{array}\right]$$

$$\text{rank}\,[zI - F \mid G] = \text{rank}\begin{bmatrix} zI - F_{11} & G_1 & -F_{12} \\ 0 & 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix} \Big\} \text{ lin indip. } \forall z$$

$\exists\, \bar{z}$ t.c. $v^T(\bar{z}I - F_{22}) = 0$, $v \neq 0$?

$\bar{z}v^T = v^T F_{22} \implies F_{22}^T v = \bar{z} v \implies \bar{z}$ è autovalore di F_{22}^T

$\implies \bar{z}$ è autovalore di F_{22}

rank $[zI - F \mid G]$ non pieno per tutti e soli gli z che sono autovalori di F_{22} !

back

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ raggiungibile

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile

back

3) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Σ ragg. $\iff$ $[zI - F \mid G]$ rango pieno $\forall z \in \mathbb{C}$

$\forall z$ autovalore di F

$[I - F \mid G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango non pieno

$\Rightarrow \Sigma$ non è ragg.

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \qquad G_J = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_J = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad (F_J, G_J) \text{ è non ragg}$$

back

Σ ragg. $\Rightarrow$ $m \geq \max_i g_i$

g_i: molt. geom di λ_i = num di miniblocchi relativi a λ_i

Esempi

extra

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

back

1) $x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix}}^{F} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{G} u(t) \qquad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im} F^n \subseteq X_R = \operatorname{Im} R$$

$$R = [\,G \quad FG\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} \qquad \Sigma \text{ non ragg.} \qquad X_R = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im} F^2 = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} f_1^2 & 0 \\ f_1 + f_2 & f_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im} F^2 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & f_1, f_2 \neq 0 \\ \operatorname{span} \begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_1 \end{bmatrix} & f_2 = 0,\ f_1 \neq 0 \\ \operatorname{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & f_2 \neq 0,\ f_1 = 0 \end{cases}$$

First two cases: $\operatorname{Im} F^2 \not\subseteq X_R$ $\quad \Sigma$ non è contr.

Third case: $\operatorname{Im} F^2 = X_R$ $\quad \Sigma$ è contr.

$\{0\}$ $\qquad f_2 = f_1 = 0$ $\qquad \operatorname{Im} F^2 \subset X_R$

back

2)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma \text{ ragg} \Rightarrow \Sigma \text{ contr.}$$

3)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\operatorname{Im} F^3 \subseteq X_R = \operatorname{Im} R$$

$$R = [G \quad FG \quad F^2G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Σ non ragg.

$$X_R = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Im}\, F^3 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X_R$$

Σ controllabile

$$X_c(1) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \; Fx \in \text{Im}(R_1) \}$$

$$= \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_c(2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : F^2 x \in \operatorname{Im}(R_2) \right\}$$

$$= \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

Σ è contr. in 2 passi $(X_c(2) = \mathbb{R}^3)$