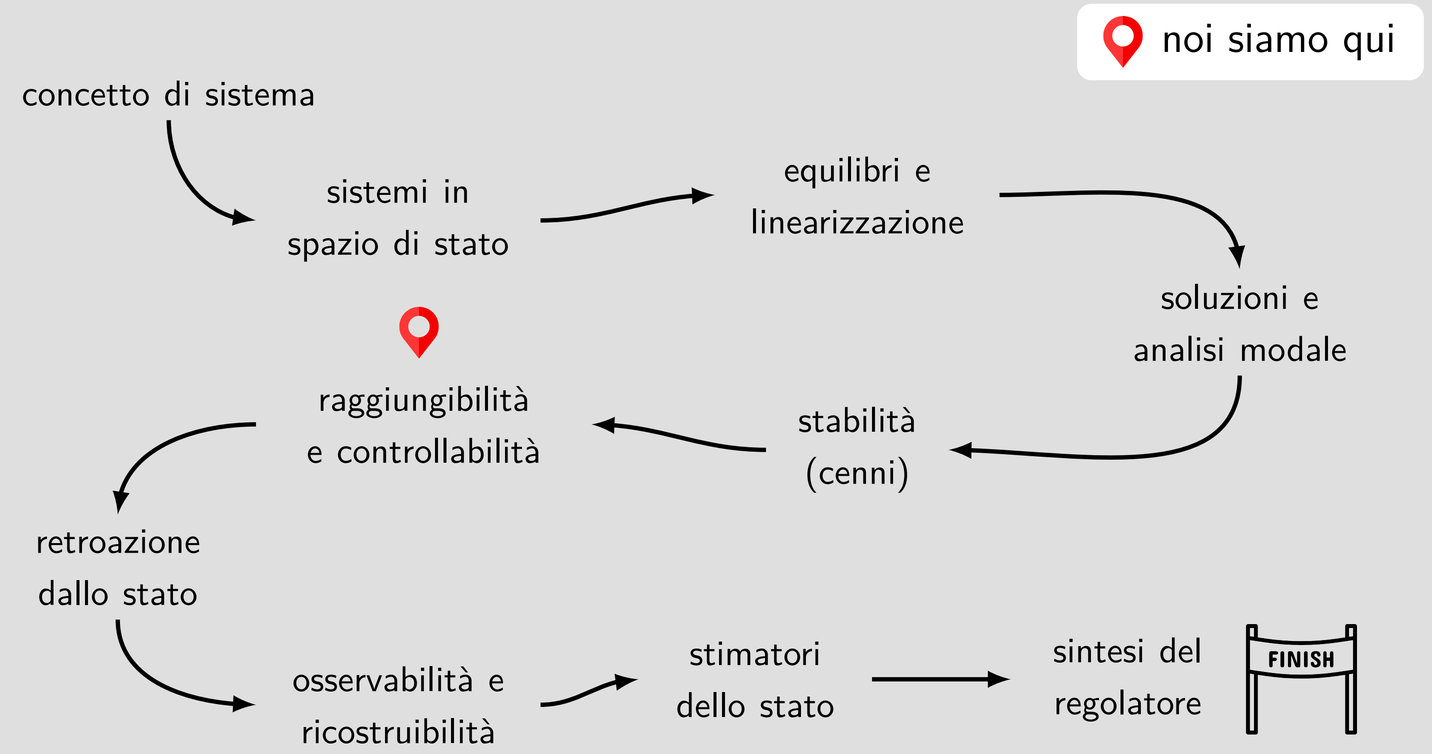
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 1)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

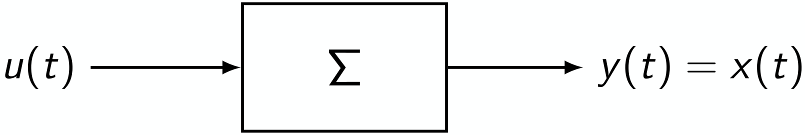

noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

In questa lezione

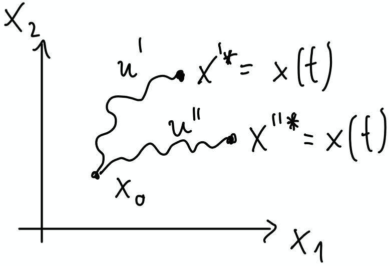
- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.

Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$



Raggiungibilità e controllabilità

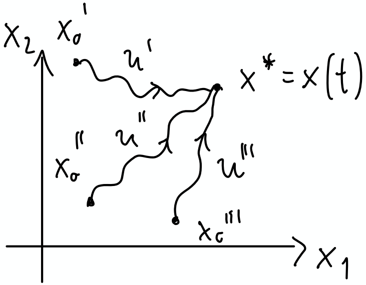


sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Raggiungibilità $=$ possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato x^* a partire da uno stato x_0 **fissato** agendo su $u(t)$

Raggiungibilità e controllabilità



sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

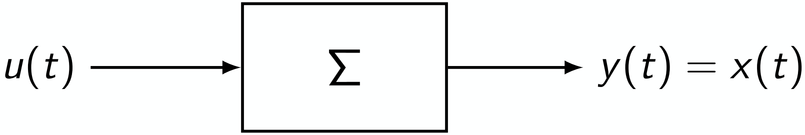
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Raggiungibilità = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato x^* a partire da uno stato x_0 **fissato** agendo su $u(t)$

Controllabilità = possibilità di raggiungere uno stato desiderato x^* **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato x_0 agendo su $u(t)$

Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$



Definizione: Uno stato x^* si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Definizione: Uno stato x^* si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

Definizione: L'insieme $X_R(t)$ di tutti gli stati x^* raggiungibili dallo stato x_0 al tempo t è detto spazio raggiungibile al tempo t.

Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

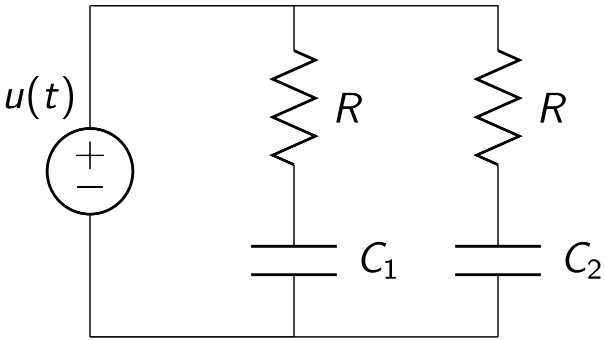
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Definizione: Uno stato x^* si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

Definizione: L'insieme $X_R(t)$ di tutti gli stati x^* raggiungibili dallo stato x_0 al tempo t è detto spazio raggiungibile al tempo t.

(tipicamente: $x_0 = 0,\ t_0 = 0$)

Esempio introduttivo



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0) = 0$:

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$, $\forall u(t), \forall t \geq 0$

$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}$, $\forall t \geq 0$

note

Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Definizione: Uno stato x_0 si dice controllabile allo stato x^* al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$.

(“x_0 controllabile allo stato x^*” $=$ “x^* raggiungibile dallo stato x_0”)

Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Definizione: Uno stato x_0 si dice controllabile allo stato x^* al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$.

Definizione: L'insieme $X_C(t)$ di tutti gli stati x_0 controllabili allo stato x^* al tempo t è detto spazio controllabile al tempo t.

Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

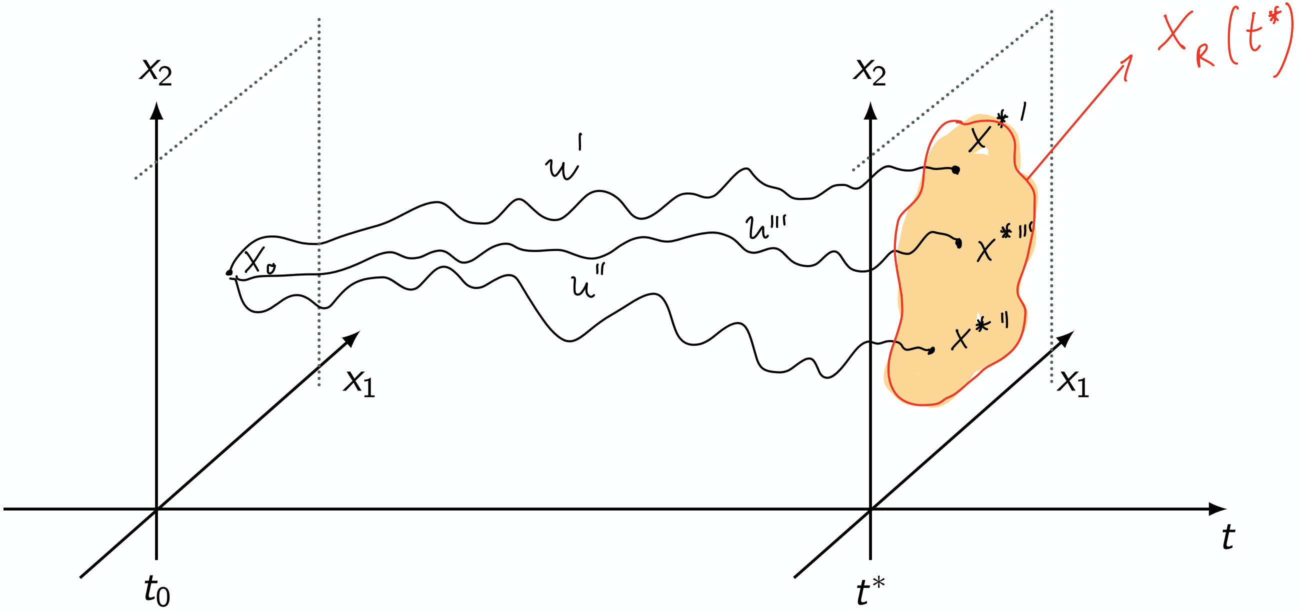
Definizione: Uno stato x_0 si dice controllabile allo stato x^* al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$.

Definizione: L'insieme $X_C(t)$ di tutti gli stati x_0 controllabili allo stato x^* al tempo t è detto spazio controllabile al tempo t.

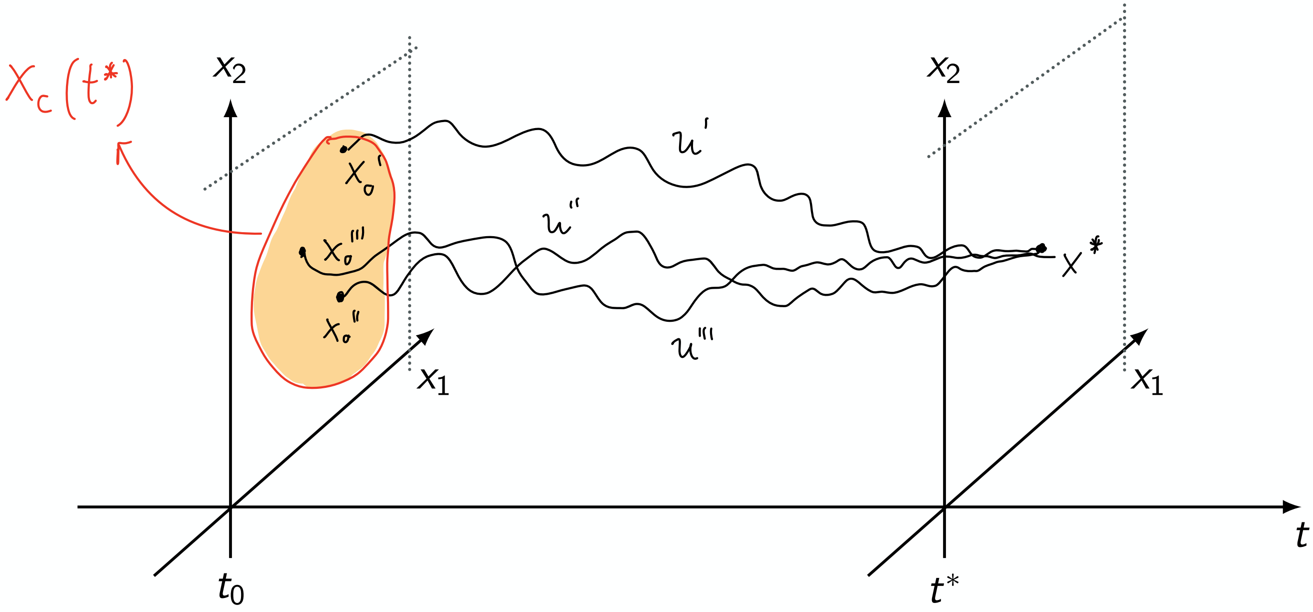
(tipicamente: $x^* = 0$, $t_0 = 0$)

controllabilità (a zero)

Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



In questa lezione

- Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\quad \Sigma \quad} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k)}_{\text{evoluzione forzata}}$$

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mt} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mt}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t ($=$ in t passi) a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

quando $X_R(t) = \mathbb{R}^n$?

Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{im}(\mathcal{R}_t)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u_t \text{ t.c. } x = \mathcal{R}_t u_t\}$$

note

Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

note

Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di raggiungibilità}$$

$$X_R \triangleq X_R(i) = \text{(massimo) spazio raggiungibile} \quad = X_R(n)$$

note

Criterio di raggiungibilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

Criterio di raggiungibilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{\circledR}\ \texttt{ctrb(sys)})$$

$$\overset{!}{=} [G \ \ FG \ \cdots \ F^{n-1}G]$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

$$X_R(n) = \mathbb{R}^n$$

$$\text{im}\, R_n$$

R contiene
n colonne lin indip.

Criterio di raggiungibilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{®}\ \texttt{ctrb(sys)})$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

$$m = 1:\ \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0 \longrightarrow \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$m > 1:\ \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0 \longrightarrow \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times mn}$$

$A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ $\quad \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^T)$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

note

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ non raggiungibile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

note

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G$$

note

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z = T^{-1}x} \quad z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \; G' = T^{-1}G$$

$$\mathcal{R}' = \begin{bmatrix} G' & F'G' & \cdots & (F')^{n-1}G' \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\mathcal{R}') = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

note

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \; G' = T^{-1}G$$

$$\mathcal{R}' = \begin{bmatrix} G' & F'G' & \cdots & (F')^{n-1}G' \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\mathcal{R}') = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

Inoltre, se Σ raggiungibile: $\quad \mathcal{R}'\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\mathcal{R}'\mathcal{R}^\top)^{-1}$

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 1)

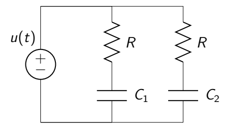
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio introduttivo



$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$

Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0) = 0$:

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t),\ \forall u(t), \forall t \geq 0$

$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\},\ \forall t \geq 0$

note

$x_1 = v_{C_1}, \quad x_2 = v_{C_2}$

Spazio raggiungibile $X_R(t)$? $\quad x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\quad C_1 = C_2 = C$

Modello di stato:

$$\dot{x}_1 = \dot{v}_{C_1} = \frac{1}{C_1} i_{C_1} = \frac{1}{C_1} i_R = \frac{1}{C_1}\left(\frac{u - v_{C_1}}{R}\right) = \frac{1}{RC_1} u - \frac{1}{RC_1} x_1$$

$$\dot{x}_2 = \dot{v}_{C_2} = \frac{1}{C_2} i_{C_2} = \frac{1}{C_2} i_R = \frac{1}{C_2}\left(\frac{u - v_{C_2}}{R}\right) = \frac{1}{RC_2} u - \frac{1}{RC_2} x_2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{G} u$$

$$x(t) = \cancel{e^{Ft} x(0)}^{\,0} + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC_1}(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{RC_2}(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau \overset{C_1 = C_2}{=} \frac{1}{RC} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \\ e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \\ \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$X_R(t) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 = x_2 \right\} \longrightarrow C_1 \neq C_2,\ X_R(t)?$$

Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

note

$$G = [g_1 \cdots g_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

<u>Teorema (Cayley-Hamilton)</u>: Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e sia $\Delta_F(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico di F. Allora:

$$\Delta_F(F) = F^n + \alpha_{n-1}F^{n-1} + \cdots + \alpha_1 F + \alpha_0 I = 0$$

(polinomio caratteristico di F è un polinomio annullatore per F)

<u>Dim. teorema degli spazi raggiungibili</u>

1) Catena di inclusioni: $X_R(i) \subseteq X_R(i+1) \quad \forall i$

$$R_i = [G \;\; FG \cdots F^{i-1}G] = [g_1 \cdots g_m \;\; Fg_1 \cdots Fg_m \cdots F^{i-1}g_1 \cdots F^{i-1}g_m]$$

$$R_{i+1} = [G \;\; FG \cdots F^{i}G] = [g_1 \cdots g_m \;\; Fg_1 \cdots Fg_m \cdots F^{i-1}g_1 \cdots F^{i-1}g_m \;\; F^i g_1 \cdots F^i g_m]$$

Poiché R_{i+1} contiene le colonne di R_i

$$\Longrightarrow X_R(i) = \text{im}\, R_i \subseteq \text{im}\, R_{i+1} = X_R(i+1)$$

2) Stazionarietà della catena per $i \leq n$

$$X_R(n) = \text{im}[G \;\; FG \cdots F^{n-1}G] = \text{span}\{g_1, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, \dots, F^{n-1}g_1, \dots, F^{n-1}g_m\}$$

$$X_R(n+1) = \text{im}[G \;\; FG \cdots F^{n}G] = \text{span}\{g_1, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, \dots, F^{n}g_1, \dots, F^{n}g_m\}$$

Da Cayley-Hamilton:

$$\Delta_F(F) = 0 \longrightarrow F^n = -\alpha_{n-1}F^{n-1} - \alpha_{n-2}F^{n-2} - \dots - \alpha_1 F - \alpha_0 I$$

$$\Longrightarrow F^n g_k = -\alpha_{n-1}F^{n-1}g_k - \alpha_{n-1}F^{n-2}g_k - \dots - \alpha_1 F g_k - \alpha_0 g_k \quad \forall k=1,\dots,m$$

$$\Longrightarrow X_R(n+1) = \text{span}\{g_1,\dots,g_m, Fg_1,\dots,Fg_m,\dots,F^{n-1}g_1,\dots,F^{n-1}g_m\}$$

$$= X_R(n)$$

Quindi esiste sicuramente $i \leq n$ tale $X_R(i) = X_R(i+1)$

Ci rimane da dimostrare $X_R(i) = X_R(i+1) \Longrightarrow X_R(i+1) = X_R(i+2)$

Questo equivale a dimostrare che se $X_R(i) = X_R(i+1)$ allora

$$\text{im}(F^{i+1}G) \subseteq \text{im}[G \; FG \cdots F^i G] = X_R(i+1)$$

Restringiamoci per semplicità al caso di un singolo ingresso $G = g \in \mathbb{R}^n$

$$F^{i+1}g = FF^ig \underset{\downarrow}{=} F\sum_{k=0}^{i-1}\beta_k F^k g = \beta_{i-1}F^i g + F\sum_{k=0}^{i-2}\beta_k F^k g = (*)$$

$$F^i g \in X_R(i+1) = X_R(i) = \text{span}\{g, Fg, \dots, F^{i-1}g\}$$

per ipotesi

$$(*) = \underbrace{\beta_{i-1}F^i g}_{\in X_R(i+1)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{i-2}\beta_k F^{k+1} g}_{\in X_R(i) \subseteq X_R(i+1)} \in X_R(i+1)$$

$$\Longrightarrow \text{im}(F^{i+1}g) \subseteq X_R(i+1) \Longrightarrow X_R(i+2) = X_R(i+1) \qquad \square$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

note

1) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \Sigma = (F, G)$ raggiungibile?

$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rank } R = 1 < 2 \implies \Sigma$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Sigma = (F, G)$ raggiungibile?

$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rank } R = 2 \implies \Sigma$ raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \Sigma = (F, G)$

$X_R(1) = \text{im } G = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

$X_R(2) = \text{im } [G \;\; FG] = \text{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^3 \implies \Sigma$ è raggiungibile in 2 passi

$i = 2$ indice di ragg. del sistema

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G$$

$$\Sigma = (F, G) \xrightarrow{z = T^{-1}x} \Sigma' = (F', G') = (T^{-1}FT, T^{-1}G)$$

$$R' = [G' \quad F'G' \quad (F')^2G' \cdots (F')^{n-1}G'] = [T^{-1}G \quad T^{-1}F\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G \quad T^{-1}F^2\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G \cdots T^{-1}F^{n-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G] = T^{-1}[G \quad FG \cdots F^{n-1}G] = T^{-1}R$$

$\mathrm{rank}(R') = \mathrm{rank}(R) \longrightarrow \Sigma'$ raggiungibile $\Longleftrightarrow \Sigma$ raggiungibile

cambio base T^{-1} non modifica rango

$R' = T^{-1}R \longrightarrow R'R^T = T^{-1}(RR^T)$ se Σ ragg. $\det(RR^T) \neq 0$

$\longrightarrow RR^T$ è invertibile

Σ raggiungibile $T^{-1} = (R'R^T)(RR^T)^{-1}$

$\longrightarrow T = (RR^T)(R'R^T)^{-1}$