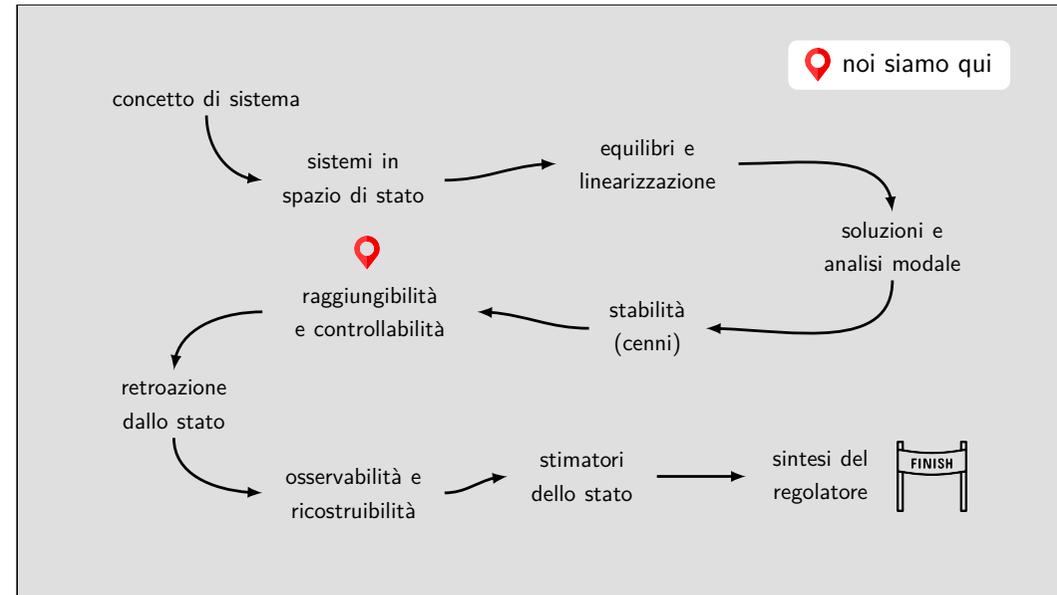


# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 1)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2021-2022

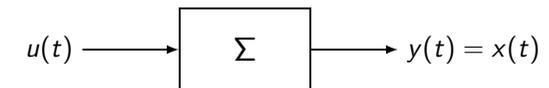


## In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.

## Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

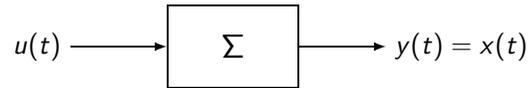


**Raggiungibilità** = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato  $x^*$  a partire da uno stato  $x_0$  **fissato** agendo su  $u(t)$

**Controllabilità** = possibilità di raggiungere uno stato desiderato  $x^*$  **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato  $x_0$  agendo su  $u(t)$

## Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

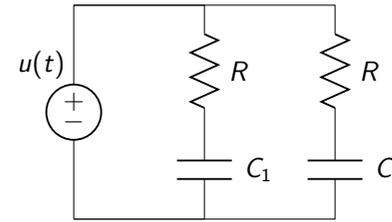


**Definizione:** Uno stato  $x^*$  si dice raggiungibile dallo stato  $x_0$  al tempo  $t^*$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t^*$ , tale che  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t^*) = x^*$ .

**Definizione:** L'insieme  $X_R(t)$  di tutti gli stati  $x^*$  raggiungibili dallo stato  $x_0$  al tempo  $t$  è detto spazio raggiungibile al tempo  $t$ .

(tipicamente:  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ )

## Esempio introduttivo



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

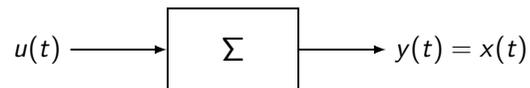
Se  $C_1 = C_2$  e  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ :

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \quad \forall u(t), \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}, \quad \forall t \geq 0$$

## Stati e spazi controllabili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

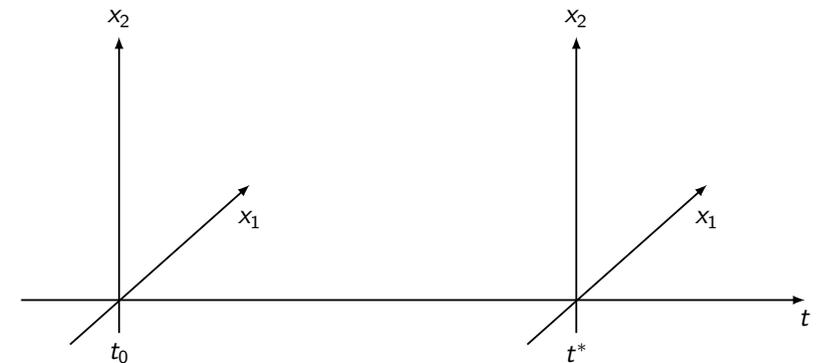


**Definizione:** Uno stato  $x_0$  si dice controllabile allo stato  $x^*$  al tempo  $t^*$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t^*$ , tale che  $x(t_0) = x_0$  e  $x(t^*) = x^*$ .

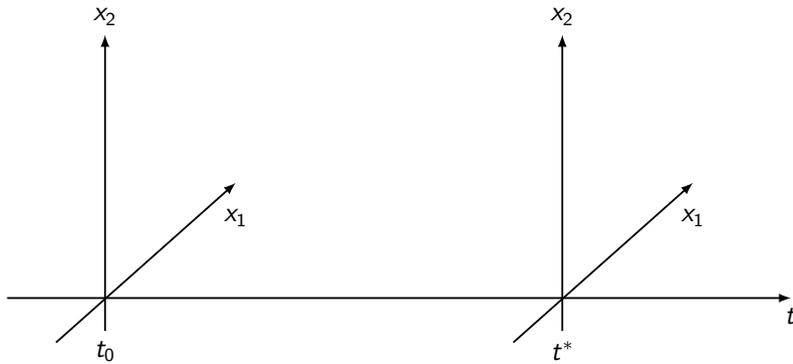
**Definizione:** L'insieme  $X_C(t)$  di tutti gli stati  $x_0$  controllabili allo stato  $x^*$  al tempo  $t$  è detto spazio controllabile al tempo  $t$ .

(tipicamente:  $x^* = 0$ ,  $t_0 = 0$ )

## Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica

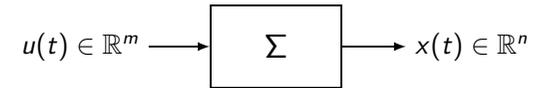


## Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



## Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = 0$$



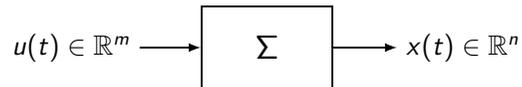
$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \quad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in  $t$  passi

## Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = 0$$



$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati  $x^*$  raggiungibili al tempo  $t$  (= in  $t$  passi) a partire da  $x(0) = 0$ ?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati  $x^* \in \mathbb{R}^n$ ?

## Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{im}(\mathcal{R}_t)$$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$i$  = indice di raggiungibilità

$$X_R \triangleq X_R(i) = (\text{massimo}) \text{ spazio raggiungibile}$$

## Criterio di raggiungibilità del rango

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se  $X_R = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in  $t$  passi se  $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ ,  
con  $t$  indice di raggiungibilità.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n =$  matrice di raggiungibilità del sistema (Matlab<sup>®</sup> ctrb(sys))

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

$$m = 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$$

$$m > 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$$

## Esempi

$$1. x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies \text{non raggiungibile}$$

$$2. x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies \text{raggiungibile (in 2 passi)}$$

$$3. x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \implies \text{raggiungibile (in 2 passi)}$$

## Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G$$

$$\mathcal{R}' = \begin{bmatrix} G' & F'G' & \dots & (F')^{n-1}G' \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\mathcal{R}') = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$  cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

---

Inoltre, se  $\Sigma$  raggiungibile:  $\mathcal{R}'\mathcal{R}'^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\mathcal{R}'\mathcal{R}'^\top)^{-1}$