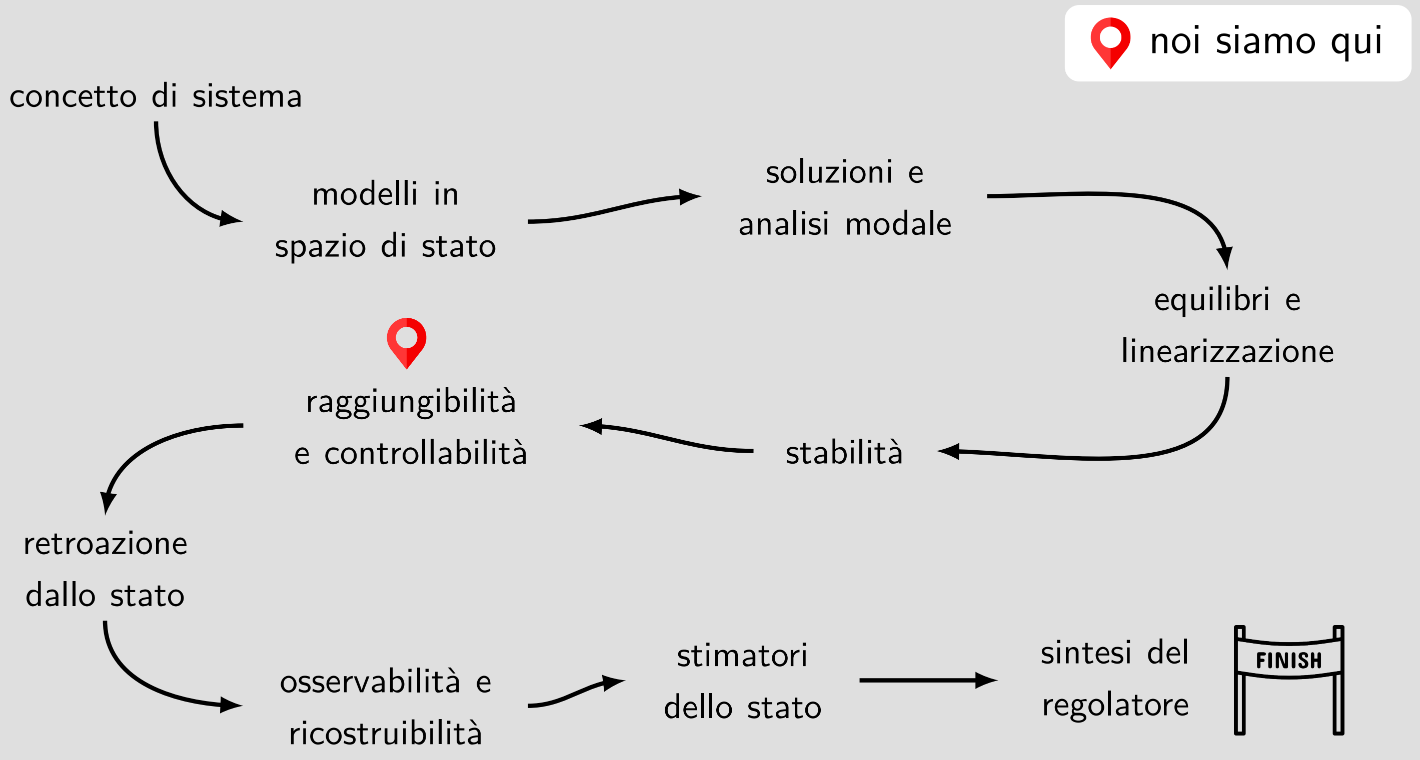
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
# Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 1)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

# In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Controllo a minima energia a t.d.

# Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

# Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

**Raggiungibilità** $=$ possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato $x^*$ a partire da uno stato $x_0$ **fissato** agendo su $u(t)$

# Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

**Raggiungibilità** = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato $x^*$ a partire da uno stato $x_0$ **fissato** agendo su $u(t)$

**Controllabilità** = possibilità di raggiungere uno stato desiderato $x^*$ **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato $x_0$ agendo su $u(t)$

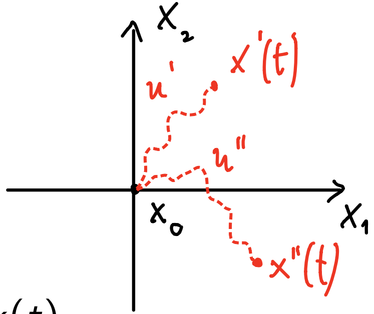
# Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

**Definizione:** Uno stato $x^*$ si dice raggiungibile dallo stato $x_0$ al tempo $t^*$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

# Stati e spazi raggiungibili




sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

**Definizione:** Uno stato $x^*$ si dice raggiungibile dallo stato $x_0$ al tempo $t^*$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

**Definizione:** L'insieme $X_R(t)$ di tutti gli stati $x^*$ raggiungibili dallo stato $x_0$ al tempo $t$ è detto spazio raggiungibile al tempo $t$.

# Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

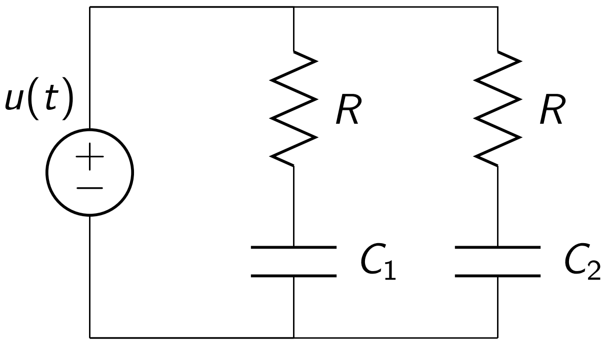
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

**Definizione:** Uno stato $x^*$ si dice raggiungibile dallo stato $x_0$ al tempo $t^*$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

**Definizione:** L'insieme $X_R(t)$ di tutti gli stati $x^*$ raggiungibili dallo stato $x_0$ al tempo $t$ è detto spazio raggiungibile al tempo $t$.

(tipicamente: $x_0 = 0,\ t_0 = 0$)

# Esempio introduttivo




$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$

Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0) = 0$:

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t),\ \forall u(t), \forall t \geq 0$

$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\},\ \forall t \geq 0$

note

# Stati e spazi controllabili

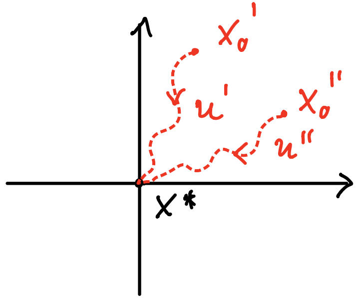
sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

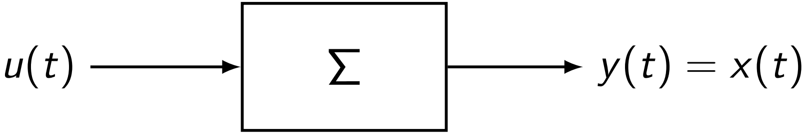
**Definizione:** Uno stato $x_0$ si dice controllabile allo stato $x^*$ al tempo $t^*$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$.

("$x_0$ controllabile allo stato $x^*$" = "$x^*$ raggiungibile dallo stato $x_0$")

# Stati e spazi controllabili




sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$




**Definizione:** Uno stato $x_0$ si dice controllabile allo stato $x^*$ al tempo $t^*$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$.

**Definizione:** L'insieme $X_C(t)$ di tutti gli stati $x_0$ controllabili allo stato $x^*$ al tempo $t$ è detto spazio controllabile al tempo $t$.

# Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

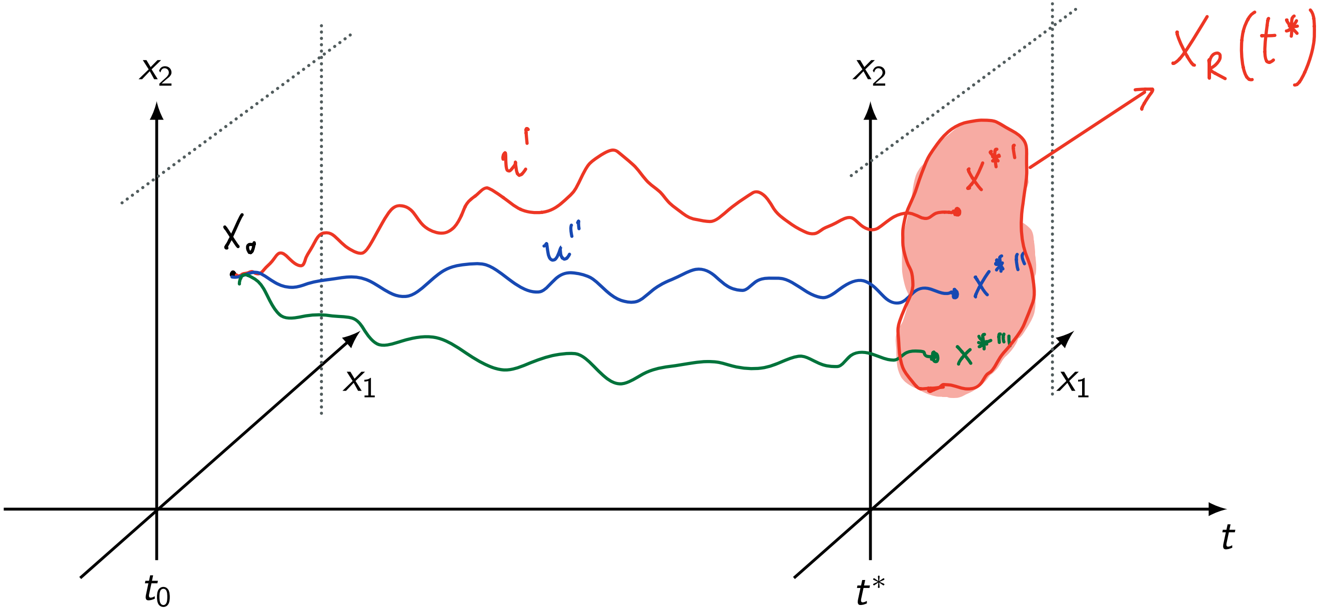
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

**Definizione:** Uno stato $x_0$ si dice controllabile allo stato $x^*$ al tempo $t^*$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$.

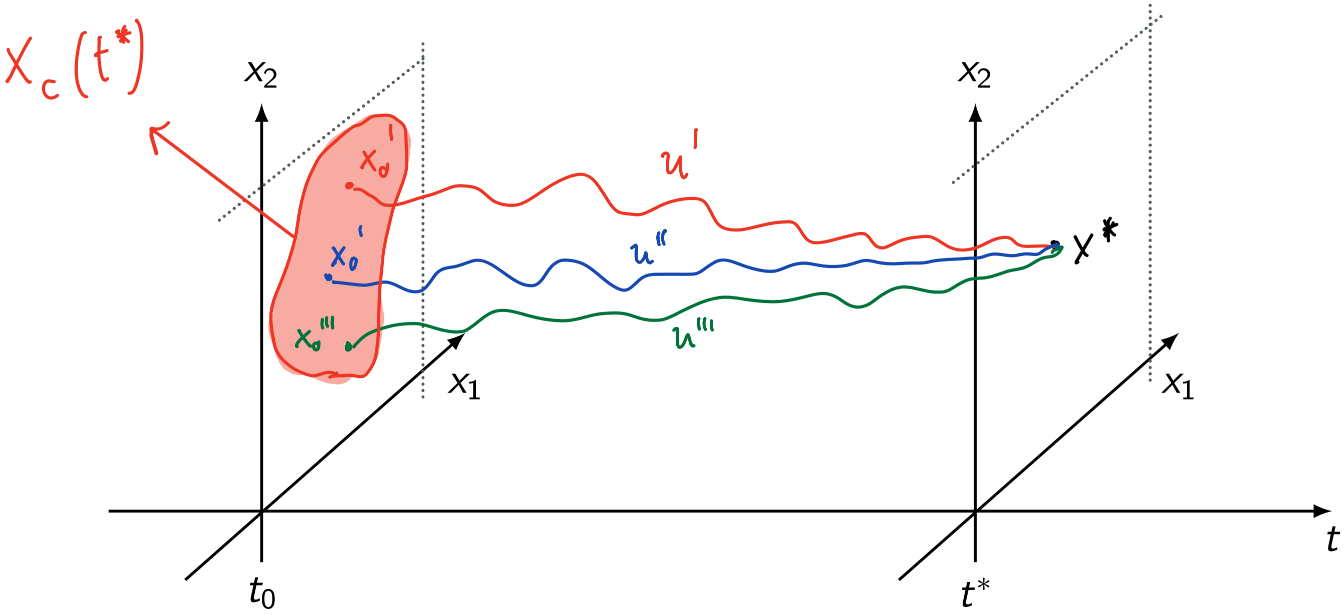
**Definizione:** L'insieme $X_C(t)$ di tutti gli stati $x_0$ controllabili allo stato $x^*$ al tempo $t$ è detto spazio controllabile al tempo $t$.

(tipicamente: $x^* = 0$, $t_0 = 0$) controllabilità a zero

# Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



# Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



# In questa lezione

- Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- Controllo a minima energia a t.d.

# Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\quad \Sigma \quad} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{\text{evoluzione forzata}}$$

# Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mt} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mt}$$

matrice di raggiungibilità in $t$ passi

# Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in $t$ passi

# Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati $x^*$ raggiungibili al tempo $t$ ($=$ in $t$ passi) a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

# Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{im}(\mathcal{R}_t)$$

$$X_R(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists\, u_t \ \text{ t.c. } \ x = R_t u_t \right\} = \mathrm{im}(R_t)$$

note

# Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{im}(\mathcal{R}_t)$$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots \qquad [X_R(t) \subseteq X_R(t+1)]$$

dim del sistema

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

note

# Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{im}(\mathcal{R}_t)$$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di raggiungibilità}$$

$$X_R \triangleq X_R(i) = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

note

# Criterio di raggiungibilità del rango

**Definizione:** Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in $t$ passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con $t$ indice di raggiungibilità.

# Criterio di raggiungibilità del rango

**Definizione:** Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in $t$ passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con $t$ indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \underbrace{\mathcal{R}_n}_{\hookrightarrow \text{ dim. del sistema}} = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \underbrace{\mathrm{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n}_{\substack{\exists\, n \text{ colonne} \\ \text{lin. indip. di } \mathcal{R}}} \iff \underbrace{\mathrm{rank}(\mathcal{R})}_{\substack{\#\text{ di colonne (o righe)} \\ \text{lin. indip. di } \mathcal{R}}} = n}$$

# Criterio di raggiungibilità del rango

**Definizione:** Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in $t$ passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con $t$ indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

$$m = 1: \ \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0 \qquad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$m > 1: \ \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\overbrace{\mathcal{R}\mathcal{R}^\top}^{n \times n}) \neq 0 \qquad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times mn}$$

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^\top)$$

# Esempi

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

**2.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

**3.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

note

# Esempi

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ non raggiungibile

**2.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

**3.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

note

# Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \; G' = T^{-1}G$$

note

# Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \; G' = T^{-1}G$$

$$\mathcal{R}' = \begin{bmatrix} G' & F'G' & \cdots & (F')^{n-1}G' \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\mathcal{R}') = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

note

# Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \xrightarrow{z=T^{-1}x} \quad z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \; G' = T^{-1}G$$

$$\mathcal{R}' = \begin{bmatrix} G' & F'G' & \cdots & (F')^{n-1}G' \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\mathcal{R}') = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

---

Inoltre, se $\Sigma$ raggiungibile: $\mathcal{R}'\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\mathcal{R}'\mathcal{R}^\top)^{-1}$

note

# In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Controllo a minima energia a t.d.

# Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se $\Sigma$ è raggiungibile in $t$ passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in $t$ passi?

note

# Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se $\Sigma$ è raggiungibile in $t$ passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in $t$ passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $x^* = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t,\ \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^* \quad (= \mathcal{R}_t^+ x^*)$

($\mathcal{R}_t^+$ = pseudoinversa di Moore-Penrose di $\mathcal{R}_t$)

note

# Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se $\Sigma$ è raggiungibile in $t$ passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in $t$ passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $x^* = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t,\ \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^*$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} x^* \quad (= \mathcal{R}_t^+ x^*)$

Caso $x_0 \neq 0$:

$$u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (x^* - F^t x_0) \quad (= \mathcal{R}_t^+ (x^* - F^t x_0))$$

($\mathcal{R}_t^+$ = pseudoinversa di Moore-Penrose di $\mathcal{R}_t$)

note

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

**1.** Ingresso $u_t$ generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

**1.** Ingresso $u_t$ generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

**2.** Ingresso a **minima "energia"**:

$$u^*_t = \arg\min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2 = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}(x^* - F^t x_0).$$

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

**1.** Ingresso $u_t$ generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

**2.** Ingresso a **minima "energia"**:

$$u_t^* = \arg\min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2 = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}(x^* - F^t x_0).$$

**3.** L'energia minima per raggiungere $x^*$ in $t$ passi è:

◂ bonus

positiva definita

$$\|u_t^*\|^2 = (x^*)^\top \mathcal{W}_t^{-1} x^*,$$

dove $\mathcal{W}_t \triangleq \mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} F^{k-1}GG^\top(F^\top)^{k-1}$ è detto Gramiano di raggiungibilità in $t$ passi del sistema. Gli autovalori di $\mathcal{W}_t$ quantificano l'energia minima richiesta per raggiungere diversi stati $x(t) = x^*$ del sistema.

# Esempio

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

note

# Esempio

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

---

$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $u^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u^*(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ min. energia

note

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
# Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 1)

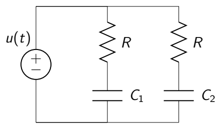
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

## Esempio introduttivo




$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0) = 0$:

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$, $\forall u(t), \forall t \geq 0$

$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}$, $\forall t \geq 0$

note



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$C_1 = C_2 = C \qquad x_1(0) = x_2(0) = 0$$

**Spazio raggiungibile $X_R(t)$?**

$$\dot{x}_1 = \dot{v}_{C_1} = \frac{1}{C} i_{C_1} = \frac{1}{C} i_R = \frac{1}{C} \frac{u - v_{C_1}}{R} = \frac{1}{RC} u - \frac{x_1}{RC}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{v}_{C_2} = \frac{1}{C} i_{C_2} = \frac{1}{C} \frac{u - v_{C_2}}{R} = \frac{1}{RC} u - \frac{1}{RC} x_2$$

$$x = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{G} u$$

$$x(t) = \cancel{e^{Ft} x_0} + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$\cancel{e^{Ft} x_0} \to 0$$

$$= \int_0^t \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \\ \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = x_2(t) \qquad \forall u(t), \; t \geq 0$$

$$\Longrightarrow X_R(t) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 = x_2 \right\} \neq \mathbb{R}^2$$

## Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{im}(\mathcal{R}_t)$$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

note



$$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$$

$$x(t) = R_t u_t, \qquad X_R(t) = \mathrm{im}(R_t)$$

$$R_t = [G \;\; FG \;\; \cdots \;\; F^{t-1}G]$$

1) $\underline{X_R(t) \subseteq X_R(t+1)}$

- approccio "algebrico": $G = [g_1 \; g_2 \; \cdots \; g_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$X_R(t) = \mathrm{im}(R_t) = \mathrm{im}\,[G \;\; FG \;\cdots\; F^{t-1}G] = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, \dots, F^{t-1}g_1, \dots, F^{t-1}g_m\}$$

span $\downarrow$ spazio generato da tutte le possibili combinazioni lineari di vettori

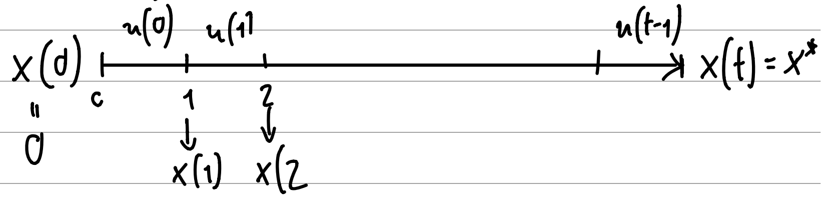
$$X_R(t+1) = \mathrm{im}(R_{t+1}) = \mathrm{im}\,[G \;\; FG \;\cdots\; F^{t}G] = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m, \dots\dots, F^{t-1}g_1, \dots, F^{t-1}g_m, F^t g_1, \dots, F^t g_m\}$$

$$\Rightarrow X_R(t) \subseteq X_R(t+1)$$

- approccio "sistemistico"

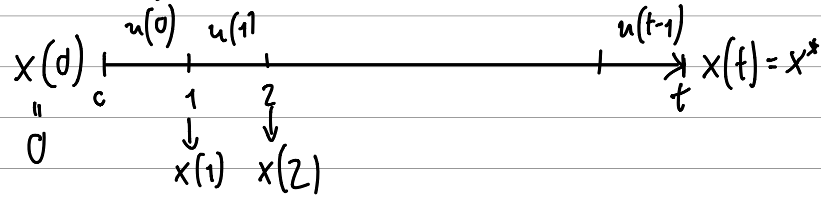
$x^*$ raggiungibile in $t$ passi (da $x(0) = 0$): $x^* \in X_R(t)$

$\exists\, u(0), u(1), \dots, u(t-1)$ t.c.

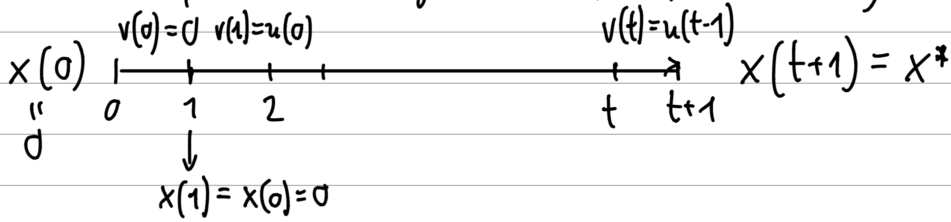


$x^*$ raggiungibile in $t$ passi (da $x(0)=0$): $x^* \in X_R(t)$

$\exists\; u(0), u(1), \dots, u(t-1)$ t.c.




Definiamo la sequenza di ingresso: $v(0)=0$, $v(1)=u(0)$, $v(2)=u(1)$, $\dots$, $v(t)=u(t-1)$




$$x^* \in X_R(t) \implies x^* \in X_R(t+1) \implies X_R(t) \subseteq X_R(t+1)$$

## Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

note



Sistemi raggiungibili?

1) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$R = R_2 = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \implies \operatorname{rank} R = 1 < 2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$\implies \Sigma$ non è ragg. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2) $F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$R = [G \;\; FG] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \operatorname{rank} R = 2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$\implies \Sigma$ è raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$X_R(1) = \operatorname{im} R_1 = \operatorname{im} G = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^3$$

$$X_R(2) = \operatorname{im} R_2 = \operatorname{im} [G \;\; FG] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^3$$

$\Downarrow$

$\Sigma$ è raggiungibile in 2 passi

## Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z = T^{-1}x} z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \; G' = T^{-1}G$$



$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad \Sigma$$

$$\downarrow z = T^{-1}x$$

$$z(t+1) = \underbrace{T^{-1}FT}_{F'} z(t) + \underbrace{T^{-1}G}_{G'} u(t) \qquad \Sigma'$$

Cosa succede alla raggiungibilità di $\Sigma'$?

$$R' = [G' \;\; F'G' \; \cdots \; (F')^{n-1}G']$$

$$= [T^{-1}G \;\; T^{-1}F\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G \; \cdots \; T^{-1}F^{n-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G]$$

$$= [T^{-1}G \;\; T^{-1}FG \; \cdots \; T^{-1}F^{n-1}G] = T^{-1}R \qquad (*)$$

$T$ è invertibile $\Longrightarrow \operatorname{rank}(R') = \operatorname{rank}(R)$

$$\Sigma \text{ ragg.} \iff \Sigma' \text{ ragg.}$$

---

$\Sigma$ raggiungibile $\Longrightarrow \operatorname{rank}(R) = n \Longrightarrow \det(RR^T) \neq 0$

$\Longrightarrow RR^T$ invertibile

$(*)$ $R' = T^{-1}R \longrightarrow R'R^T = T^{-1}(RR^T)$

$\longrightarrow T^{-1} = R'R^T(RR^T)^{-1}$

$\longrightarrow T = (RR^T)(R'R^T)^{-1}$

Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se $\Sigma$ è raggiungibile in $t$ passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in $t$ passi?

G. Baggio    Lez. 13: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 1)    24 Marzo 2021

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t), \quad x(0) = x_0 \qquad \Sigma$$

$\Sigma$ raggiungibile in $t$ passi

$x^* = x(t) \in \mathbb{R}^n$, come è fatto l'ingresso?

1) Caso $x_0 = 0$

$\exists\, u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ t.c. $\quad x^* = x(t) = R_t u_t$

Introduciamo una variabile ausiliaria $\eta_t \in \mathbb{R}^n$ : $u_t = R_t^T \eta_t$

$$x^* = x(t) = R_t R_t^T \eta_t \quad \xRightarrow[R_t R_t^T \text{ invertibile}]{} \quad \eta_t = (R_t R_t^T)^{-1} x^*$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u_t = R_t^T \eta_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} x^*}$$

$u_t$ è unico? In generale no

$u_t' = u_t + \bar{u}, \quad \bar{u} \in \ker(R_t)$

$$R_t u_t' = R_t(u_t + \bar{u}) = R_t u_t + \cancelto{0}{R_t \bar{u}} = x(t) = x^*$$

2) Caso $x_0 \neq 0$

$$x^* = x(t) = F^t x_0 + R_t u_t \Longrightarrow \underbrace{(x^* - F^t x_0)}_{\tilde{x}} = R_t u_t$$

$$\Longrightarrow u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} \tilde{x}$$

$$\overset{!}{=} R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} (x^* - F^t x_0)$$

## Esempio

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

note



$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$u'(t)$ t.c. $x_0 = x(0) = 0 \qquad x(2) = x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ?

$$R_2 = [\,G \;\; FG\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} R_2 = 3 \Rightarrow \Sigma$ è raggiungibile in 2 passi

$\Rightarrow \exists\, u'(t)$

$$u_2^* = \begin{bmatrix} u^*(1) \\ \hdashline u^*(0) \end{bmatrix} = R_2^T (R_2 R_2^T)^{-1} x^*$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \Bigg)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

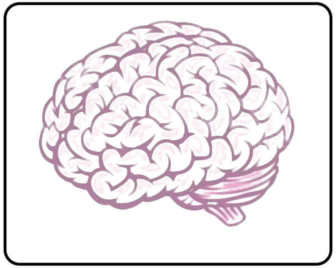
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u^*(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

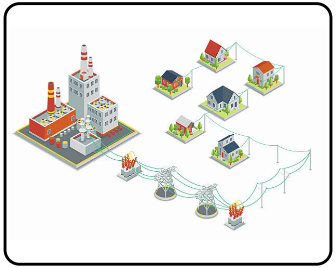
$$u_2' = u_2^* + \bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\bar{u} \in \ker R_2$

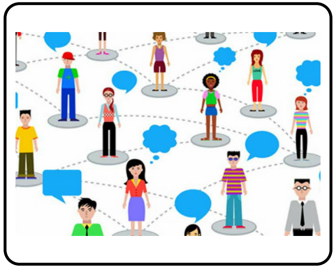
# Network dinamici



biologia

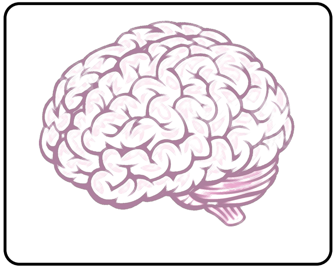


ingegneria

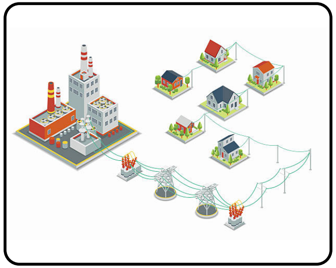


scienze sociali

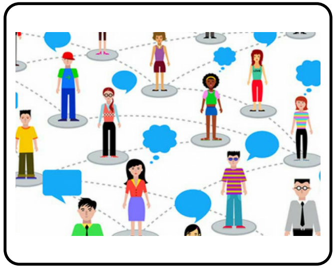
# Network dinamici



$x(t)$ = attività neurale



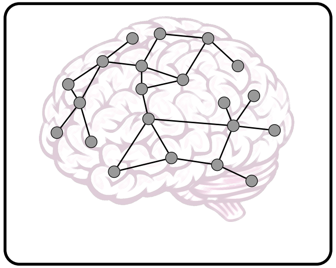
$x(t)$ = consumo di potenza



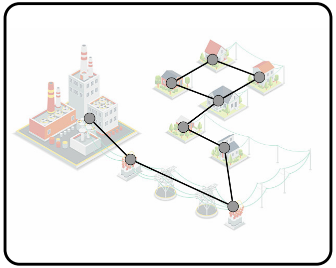
$x(t)$ = opinioni degli individui

$$\text{sistemi dinamici } [\dot{x}(t) = f(x(t)),\ x(t+1) = f(x(t))]$$

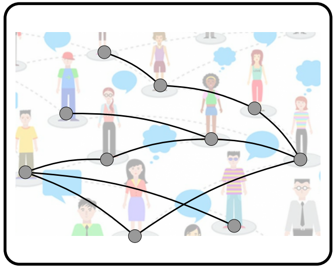
# Network dinamici



$x(t)$ = attività neurale



$x(t)$ = consumo di potenza

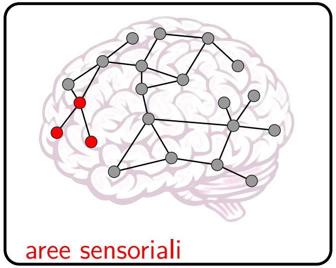


$x(t)$ = opinioni degli individui

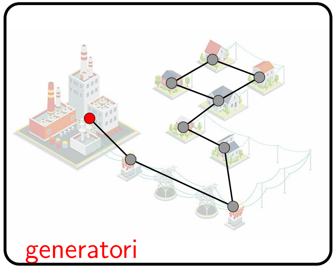
sistemi dinamici $[\dot{x}(t) = f(x(t)), \, x(t+1) = f(x(t))]$

formati da tante unità “semplici” interconnesse tra loro

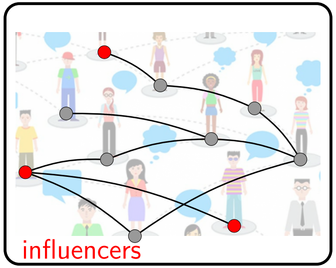
# Network dinamici




$x(t)$ = attività neurale




$x(t)$ = consumo di potenza



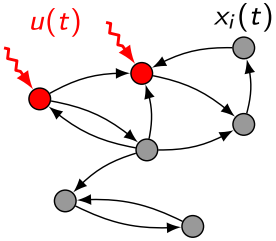

$x(t)$ = opinioni degli individui

sistemi dinamici $[\dot{x}(t) = f(x(t)),\ x(t+1) = f(x(t))]$

formati da tante unità "semplici" interconnesse tra loro

con presenza di unità di "controllo"

# Raggiungibilità di network lineari




sistema LTI con stato $x(t)$
$+$ ingresso $u(t)$

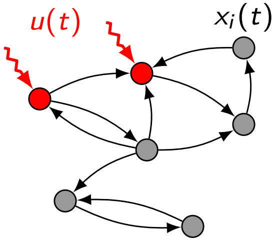
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ = network con insieme di nodi $\mathcal{V}$ e archi $\mathcal{E}$

$F$ = matrice di adiacenza del network

$G$ = matrice degli ingressi che seleziona determinati nodi

# Raggiungibilità di network lineari




sistema LTI con stato $x(t)$
$+$ ingresso $u(t)$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ = network con insieme di nodi $\mathcal{V}$ e archi $\mathcal{E}$

$F$ = matrice di adiacenza del network

$G$ = matrice degli ingressi che seleziona determinati nodi

- Quanto "facile" da controllare è il network?
- Come selezionare i "migliori" nodi da controllare?

$$\Downarrow$$

Analisi del Gramiano di raggiungibilità !!

12 May, 2011


# ARTICLE

doi:10.1038/nature10011

## Controllability of complex networks

# ARTICLE

Received 7 Apr 2015 | Accepted 19 Aug 2015 | Published 1 Oct 2015 DOI: 10.1038/ncomms9414 OPEN

## Controllability of structural brain networks

OPEN ACCESS Freely available online PLoS one

## Nodal Dynamics, Not Degree Distributions, Determine the Structural Controllability of Complex Networks

T. Bergstrom[3,5]

# BRIEF COMMUNICATIONS ARISING

## Few inputs can reprogram biological networks

ARISING FROM Y. Liu, J. Slotine & A. Barabási *Nature* **473,** 167–173 (2011)

...