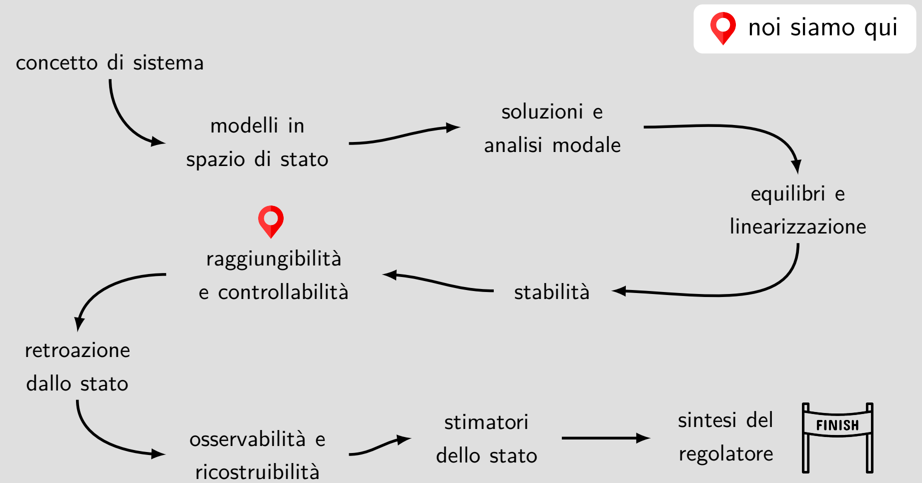
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 1)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Controllo a minima energia a t.d.

Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

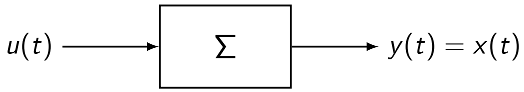
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Raggiungibilità = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato x^* a partire da uno stato x_0 **fissato** agendo su $u(t)$

Controllabilità = possibilità di raggiungere uno stato desiderato x^* **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato x_0 agendo su $u(t)$

Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

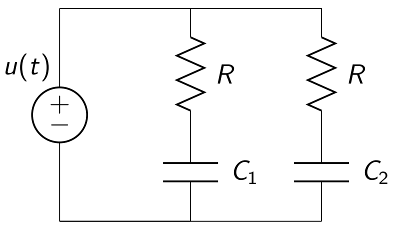


Definizione: Uno stato x^* si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(t^*) = x^*$.

Definizione: L'insieme $X_R(t)$ di tutti gli stati x^* raggiungibili dallo stato x_0 al tempo t è detto spazio raggiungibile al tempo t.

(tipicamente: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$)

Esempio introduttivo



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0) = 0$:

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \forall u(t), \forall t \geq 0$

$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}, \forall t \geq 0$

Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

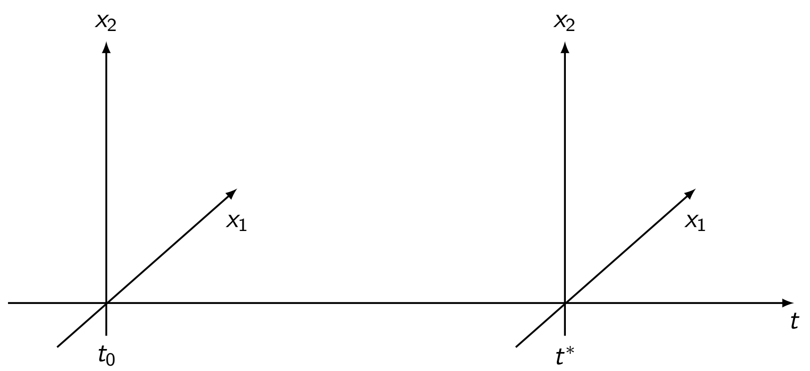
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

Definizione: Uno stato x_0 si dice controllabile allo stato x^* al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$.

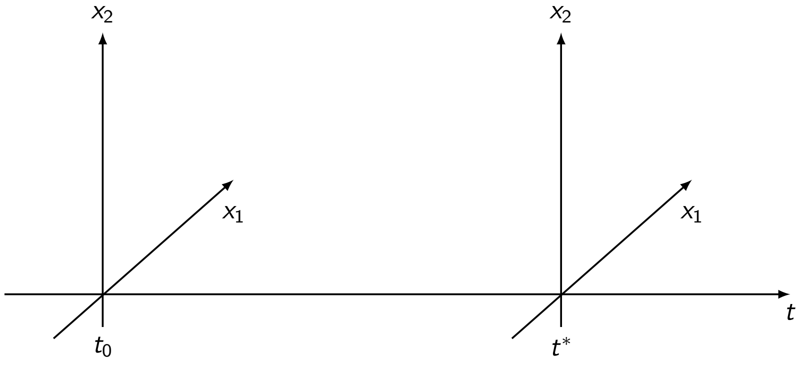
Definizione: L'insieme $X_C(t)$ di tutti gli stati x_0 controllabili allo stato x^* al tempo t è detto spazio controllabile al tempo t.

(tipicamente: $x^* = 0$, $t_0 = 0$)

Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t (= in t passi) a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \operatorname{im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di raggiungibilità}$$

$$X_R \triangleq X_R(i) = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Criterio di raggiungibilità del rango

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

$$m = 1\text{: } \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$$

$$m > 1\text{: } \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ non raggiungibile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT, \; G' = T^{-1}G$$

$$\mathcal{R}' = \begin{bmatrix} G' & F'G' & \cdots & (F')^{n-1}G' \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\mathcal{R}') = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

Inoltre, se Σ raggiungibile: $\mathcal{R}'\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\mathcal{R}'\mathcal{R}^\top)^{-1}$

Calcolo dell'ingresso di controllo (a minima energia)

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire una sequenza di ingresso $u_t \in \mathbb{R}^{mt}$ per raggiungere un qualsiasi stato $x^* \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $x^* = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t$, $\eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}x^*$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}x^*$ $(= \mathcal{R}_t^+ x^*)$

Caso $x_0 \neq 0$: $u_t = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}(x^* - F^t x_0)$ $(= \mathcal{R}_t^+(x^* - F^t x_0))$

($\mathcal{R}_t^+$ = pseudoinversa di Moore-Penrose di $\mathcal{R}_t$)

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

2. Ingresso a **minima "energia"**:

$$u_t^* = \arg\min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2 = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1}(x^* - F^t x_0).$$

3. L'energia minima per raggiungere x^* in t passi è:

$$\|u_t^*\|^2 = (x^*)^\top \mathcal{W}_t x^*,$$

dove $\mathcal{W}_t \triangleq \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} F^{k-1} G G^\top (F^\top)^{k-1}$ è detto Gramiano di raggiungibilità in t passi del sistema. Gli autovalori di $\mathcal{W}_t$ quantificano l'energia minima richiesta per raggiungere diversi stati $x(t) = x^*$ del sistema.

Esempio

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $u^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u^*(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ min. energia