

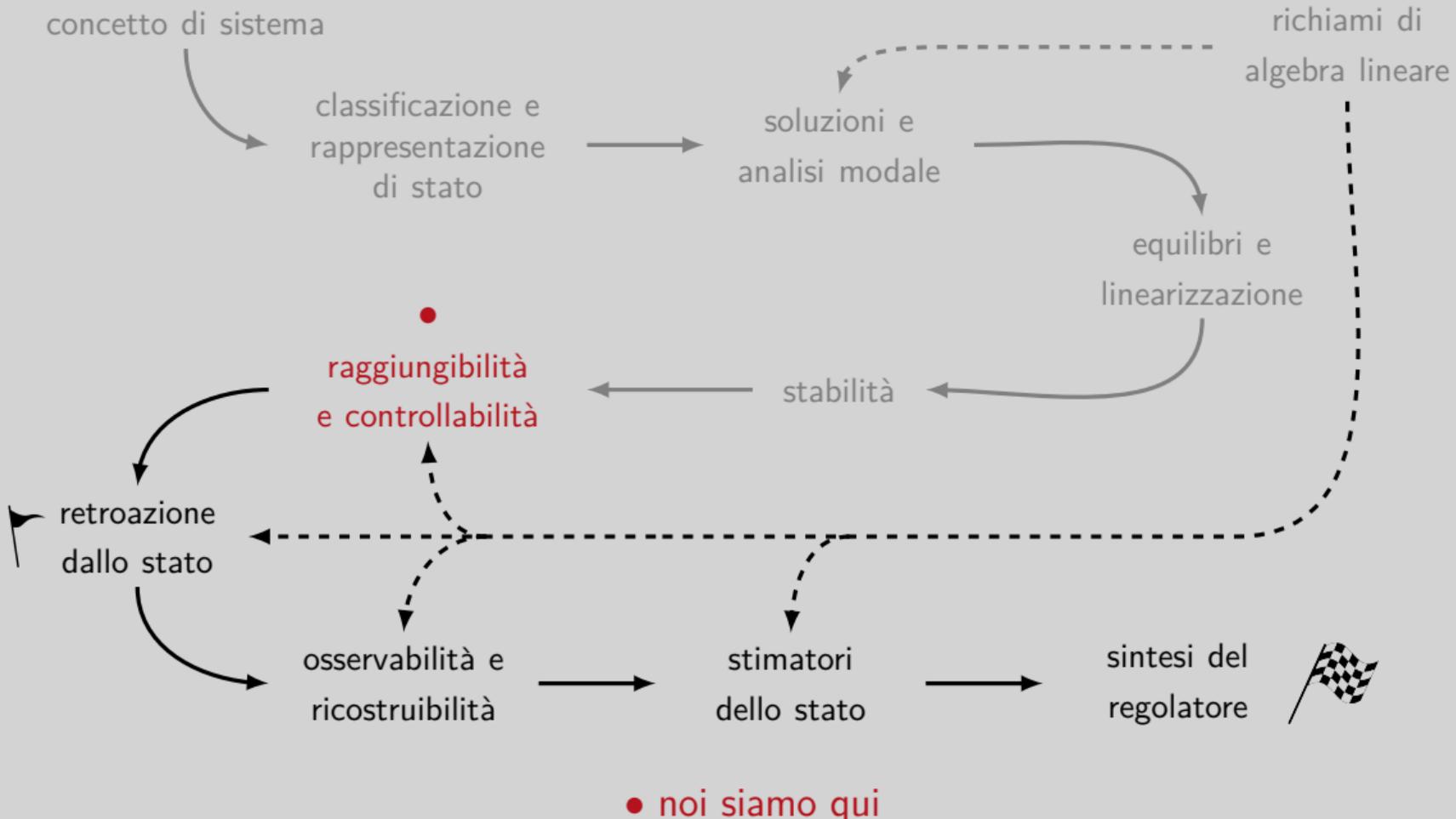
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13 & 14: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo discreto

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

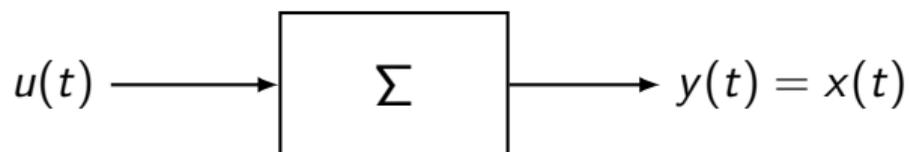


# In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
    - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
    - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
    - ▷ Test PBH di raggiungibilità
  - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

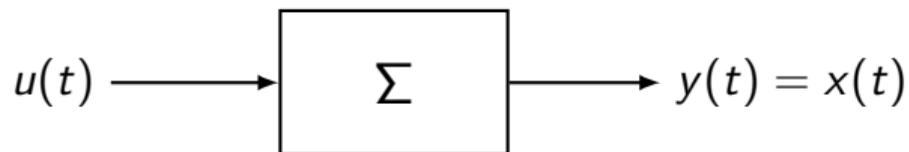


**Raggiungibilità** = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato  $\bar{x}$  a partire da uno stato  $x_0$  **fissato** agendo su  $u(t)$

**Controllabilità** = possibilità di raggiungere uno stato desiderato  $x_0$  **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato  $\bar{x}$  agendo su  $u(t)$

# Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

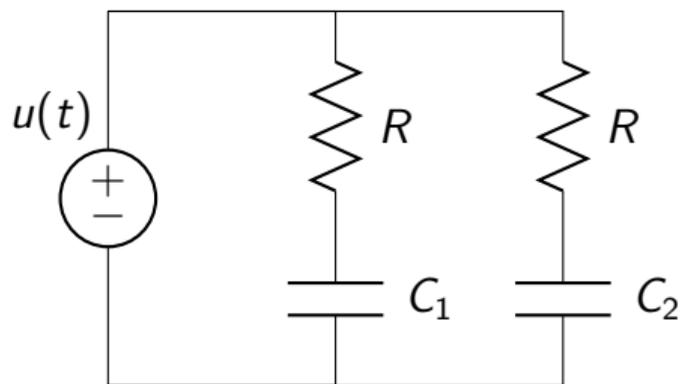


**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice raggiungibile dallo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(\bar{t}) = \bar{x}$ .

**Definizione:** L'insieme  $X_R(\bar{t})$  di tutti gli stati raggiungibili dallo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  è detto spazio raggiungibile al tempo  $\bar{t}$ .

(tipicamente:  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ )

## Esempio introduttivo



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

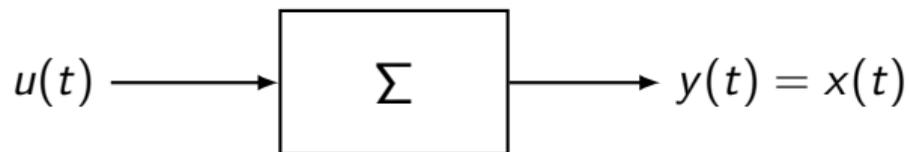
Se  $C_1 = C_2$  e  $x_1(0) = x_2(0)$ :

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \quad \forall u(t), \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}, \quad \forall t \geq 0$$

# Stati e spazi controllabili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

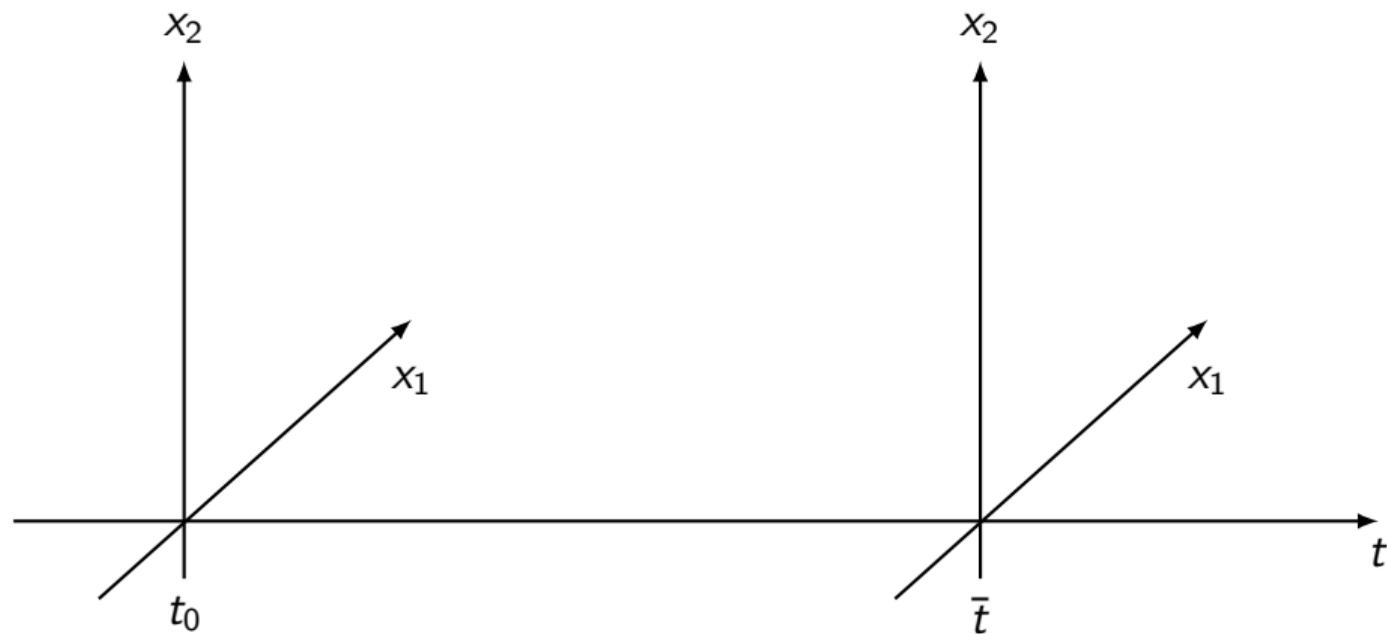


**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice controllabile allo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = \bar{x}$  e  $x(\bar{t}) = x_0$ .

**Definizione:** L'insieme  $X_C(\bar{t})$  di tutti gli stati controllabili allo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  è detto spazio controllabile al tempo  $\bar{t}$ .

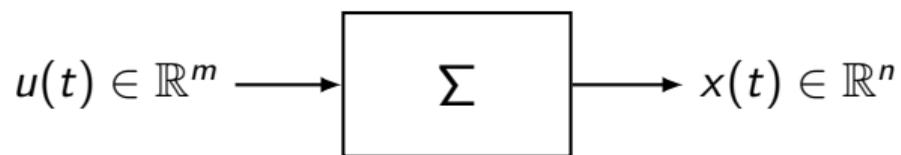
(tipicamente:  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ )

# Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



# Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = x_0$$



$$x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

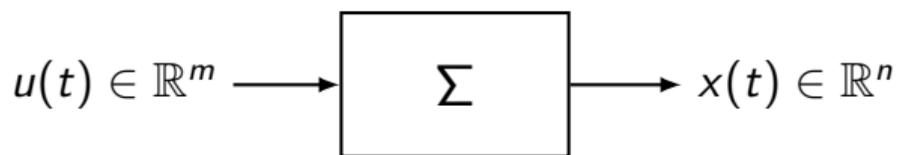
$$\mathcal{R}_t = [G \quad FG \quad \dots \quad F^{t-1}G]$$

matrice di raggiungibilità in  $t$  passi

$$u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

# Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = 0$$



$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

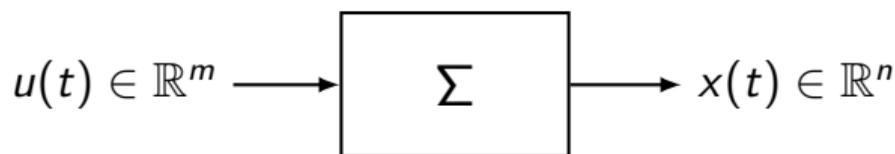
$$\mathcal{R}_t = [G \quad FG \quad \dots \quad F^{t-1}G]$$

matrice di raggiungibilità in  $t$  passi

$$u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

## Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = 0$$



$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati  $\bar{x}$  raggiungibili al tempo  $t$  (= in  $t$  passi) a partire da  $x(0) = 0$ ?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ?

# Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{Im}(\mathcal{R}_t)$$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$i$  = indice di raggiungibilità

$$X_R \triangleq X_R(i) = (\text{massimo}) \text{ spazio raggiungibile}$$

# Criterio di raggiungibilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se  $X_R = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in  $t$  passi se  $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ ,  
con  $t$  indice di raggiungibilità.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n =$  matrice di raggiungibilità del sistema

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

$$m = 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$$

$$m > 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$$

# Esempi

1.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies \text{non raggiungibile}$

2.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies \text{raggiungibile (in 2 passi)}$

3.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \implies \text{raggiungibile (in 2 passi)}$

## Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{\mathcal{R}} = [\bar{G} \quad \bar{F}\bar{G} \quad \dots \quad \bar{F}^{n-1}\bar{G}] = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{R}}) = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$  cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

---

Inoltre, se  $\Sigma$  raggiungibile:  $\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top)^{-1}$

# Calcolo dell'ingresso di controllo

Se  $\Sigma$  è raggiungibile in  $t$  passi, come costruire un ingresso  $u_t$  per raggiungere un qualsiasi stato  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $t$  passi?

- Caso  $x_0 = 0$ :
1.  $\bar{x} = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
  2.  $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t, \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$
  3.  $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$
- Caso  $x_0 \neq 0$ :  $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (\bar{x} - F^t x_0)$

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso  $u_t$  generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u}, \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}.$$

2. Ingresso  $u_t =$  ingresso a **minima energia**:

$$u_t = \arg \min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2$$

3. Gramiano di raggiungibilità del sistema in  $t$  passi:

$$\mathcal{W}_t = \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G G^\top (F^\top)^{t-1-k}.$$

Autovalori di  $\mathcal{W}_t$  quantificano l'energia richiesta per controllare il sistema.

## Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ingressi  $u'(t)$  per raggiungere  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  da  $x_0 = 0$  in 2 passi?

---

$$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ min. energia}$$

# Proprietà importante

**Definizione:** Data una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uno spazio vettoriale  $W$  si dice  $F$ -invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

**Proprietà:** Lo spazio raggiungibile  $X_R$  è  $F$ -invariante e contiene  $\text{Im}(G)$ .

# Forma canonica di Kalman

$\Sigma$  non raggiungibile  $\implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da “separare” la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

$$T = [v_1 \ \cdots \ v_k \ \tilde{v}_1 \ \cdots \ \tilde{v}_{n-k}], \quad X_R = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R, w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_w, \quad \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\text{Im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G}, \quad G_2 = 0$$

## Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$ : sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$ : sottosistema non raggiungibile

## Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}_K) = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix} \right) = k$$

## Esempi

$$1. F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

sistema **non** in forma di Kalman

## Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$  = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

# Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di  $z$  che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ .

**N.B.** La matrice PBH può essere valutata solo per gli  $z$  che sono autovalori di  $F$ !

# Test di Jordan

$$\Sigma : z(t + 1) = F_J z(t) + G_J u(t), z(0) = z_0$$

**Corollario:** Il sistema  $\Sigma$  (in forma di Jordan) è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore  $\lambda_i$  di  $F_J$ , le righe di  $G_J$  in posizione corrispondente alle ultime righe dei miniblocchi di Jordan relativi a  $\lambda_i$  sono linearmente indipendenti.

## Esempi

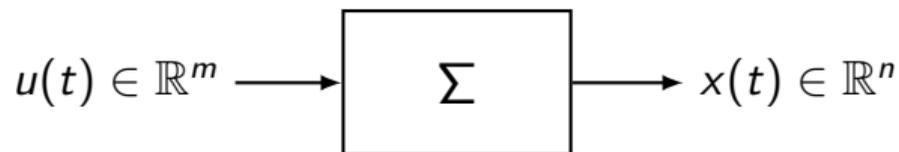
1.  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies$  raggiungibile

2.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies$  non raggiungibile

3.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies$  non raggiungibile

# Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

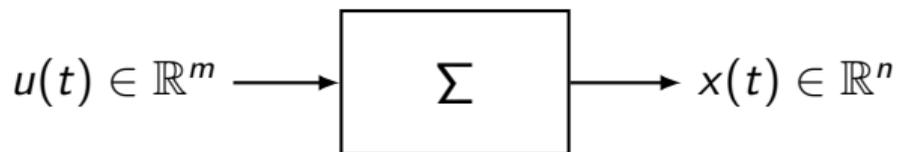
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = \bar{x}$$



$$x_0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

## Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = \bar{x}$$



$$0 = x(t) = F^t \bar{x} + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = F^t \bar{x} + \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati  $\bar{x}$  controllabili al tempo  $t$  (= in  $t$  passi) allo stato  $x(t) = 0$ ?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ ?

# Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{Im}(\mathcal{R}_t)\}$$

**Teorema:** Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$i$  = indice di controllabilità

$$X_C \triangleq X_C(i) = (\text{massimo}) \text{ spazio controllabile}$$

# Criterio di controllabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile se  $X_C = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile in  $t$  passi se  $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ ,  
con  $t$  indice di controllabilità.

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{Im}(F^n) \subseteq \text{Im}(\mathcal{R}_t) = X_R$$

$\Sigma$  raggiungibile ( $X_R = \mathbb{R}^n$ )  $\Rightarrow$   $\Sigma$  controllabile

$\Sigma$  controllabile  $\not\Rightarrow$   $\Sigma$  raggiungibile !!!

# Esempi

1.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies$  non raggiungibile  $\forall f_1, f_2$   
ma controllabile se  $f_1 = 0$

2.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies$  raggiungibile e quindi  
controllabile

3.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$  non raggiungibile  
ma controllabile (in 2 passi)

# Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$$

1.  $\Sigma$  controllabile  $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^{\bar{t}} = 0 \iff$  autovalori di  $F_{22}$  tutti nulli
2.  $X_R \subseteq X_C$  e  $X_R = X_C$  se  $F_{22}$  invertibile
3.  $\Sigma$  **reversibile** ( $F$  invertibile)  $\implies F_{22}$  invertibile  $\implies X_R = X_C$

## Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ .

**N.B.** La matrice PBH può essere valutata solo per gli  $z \neq 0$  che sono autovalori di  $F$ !