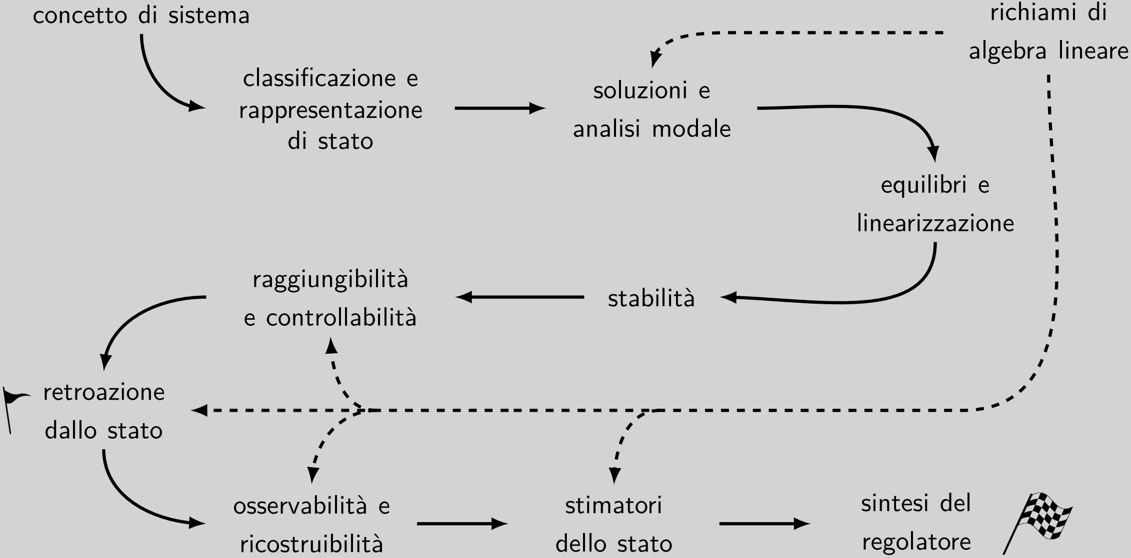
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

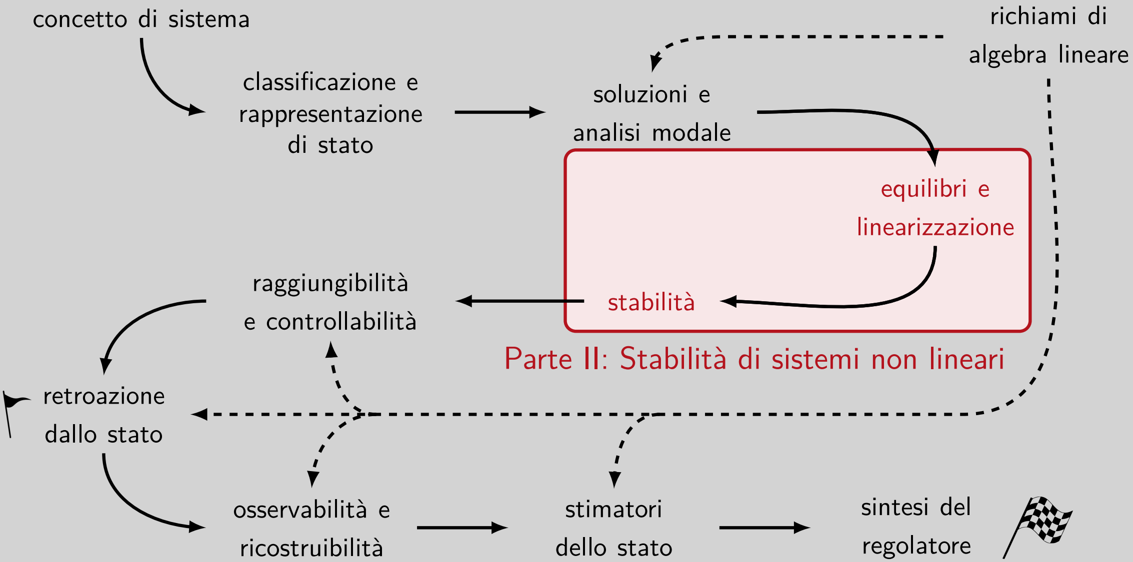
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione su stabilità di sistemi non lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
Parte II: Stabilità di sistemi non lineari
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: equilibri con ingressi costanti
- Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- Esercizio 3: equazione di Lyapunov
- Quiz time !

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: equilibri con ingressi costanti
- ▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Esercizio 3: equazione di Lyapunov
- ▷ Quiz time !

Esercizio 1 [Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

extra

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema per $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$?

2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

Esercizio 1: soluzione

1. $\alpha \neq 1$: unico equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \\ \frac{\bar{u}}{1-\alpha} \end{bmatrix}$.

   $\alpha = 1$: nessun equilibrio se $\bar{u} \neq 0$, infiniti equilibri $\begin{bmatrix} \beta^2 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$ se $\bar{u} = 0$.

2. equilibri asintoticamente stabili se $|\alpha| < 1$ e instabili se $|\alpha| > 1$.

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: equilibri con ingressi costanti
- Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- Esercizio 3: equazione di Lyapunov
- Quiz time !

Esercizio 2

extra

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha) x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

1. Stabilità di $\bar{x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione?

2. Nei casi critici usare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 2: soluzione

1. $-1 < \alpha < 0$: $\bar{x}$ asintoticamente stabile.

   $\alpha < -1$, $\alpha > 0$: $\bar{x}$ instabile.

2. Casi critici $\alpha = -1, 0$.

   $\alpha = -1$: $\bar{x}$ asintoticamente stabile.

   $\alpha = 0$: $\bar{x}$ semplicemente stabile.

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: equilibri con ingressi costanti
- ▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Esercizio 3: equazione di Lyapunov
- ▷ Quiz time !

Esercizio 3

extra

$$\dot{x} = Fx, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$F^T P + P F = -Q$$

1. Soluzioni dell'equazione di Lyapunov (se esistono) al variare di α?

2. Stabilità del sistema utilizzando le soluzioni trovate per $\alpha = 4$ e $\alpha = 2$?

Esercizio 3: soluzione

1. $P = \begin{bmatrix} \frac{\alpha+8}{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $\alpha = 4$: $P \succ 0$, $Q \succ 0 \implies$ stabilità asintotica.

   $\alpha = 2$: $P \succ 0$, $Q \succeq 0 \implies$ stabilità (almeno) semplice.

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: equilibri con ingressi costanti
- ▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Esercizio 3: equazione di Lyapunov
- ▷ Quiz time !

`www.kahoot.it`

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione su stabilità di sistemi non lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esercizio 1 [Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

extra

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema per $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$?
2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

back

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha\, x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t.$

1) $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2 = \alpha \bar{x}_2 + \bar{u} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \quad '' \\ (1-\alpha)\bar{x}_2 = \bar{u} \end{cases}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \\ \bar{x}_2 = \dfrac{\bar{u}}{1-\alpha} \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \\ \dfrac{\bar{u}}{1-\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{unico eq.}$$

back

$\boxed{\alpha = 1}$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2^{\,2} \\ \bar{u} = 0 \end{cases}$$

- $\boxed{\bar{u} \neq 0}$ nessun eq.
- $\boxed{\bar{u} = 0}$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2^{\,2} \\ 0 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \qquad \text{infiniti eq.} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \beta^2 \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

back

2) $\boxed{\alpha \neq 1}$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) = f_1(x_1, x_2) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + \bar{u} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \\ \dfrac{\bar{u}}{(1-\alpha)} \end{bmatrix}$$

$$z(t+1) = F z(t) \qquad F = J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2\bar{x}_2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \alpha$$

- $\alpha < -1$, $\alpha > 1$: $\bar{x}$ instabile
- $-1 < \alpha < 1$: $\bar{x}$ asint. stabile
- $\alpha = -1, 1$: caso critico

back

$$\boxed{\alpha = 1}$$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) + \bar{u} \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{u} = 0}$$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2\bar{x}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

caso critico!

Esercizio 2

extra

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

1. Stabilità di $\bar{x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione?
2. Nei casi critici usare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

back

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \overbrace{\alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3}^{f_1} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{-(1+\alpha) x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2}_{f_2} \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Stabilità di $\bar{x}$ usando la linearizzazione

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \alpha + x_2^2 & 2x_1x_2 + 3x_2^2 \\ -x_2^2 - 2x_1x_2 & -(1+\alpha) - 2x_1x_2 - x_1^2 \end{bmatrix}_{x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1-\alpha \end{bmatrix}$$

- $\alpha < -1$, $\alpha > 0$: $\bar{x}$ instabile

- $-1 < \alpha < 0$: $\bar{x}$ asint. stabile
- $\alpha = -1, 0$: casi critici!

2) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ def. pos.

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
&= 2x_1\left(\alpha x_1 + x_1x_2^2 + x_2^3\right) + 2x_2\left(-(1+\alpha)x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2\right) \\
&= 2\alpha x_1^2 + \cancel{2x_1^2x_2^2} + \cancel{2x_1x_2^3} - 2x_2^2 - 2\alpha x_2^2 - \cancel{2x_1x_2^3} - \cancel{2x_1^2x_2^2} \\
&= 2\alpha x_1^2 - 2\left(x_2^2 + \alpha x_2^2\right)
\end{aligned}
$$

back

$\boxed{\alpha = -1}$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2$ semidef. neg.

$\bar{x}$ è (almeno) sempl. stabile

$$N = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x) = 0 \}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$x(t) \in N \Rightarrow x_1(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 0 \quad \forall t$

back

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \Rightarrow 0 = x_2^3 \Rightarrow x_2(t) = 0 \quad \forall t$$

Per Krasowskii $\bar{x}$ asint. stabile!

$$\boxed{\alpha = 0}$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -2 x_2^2$ semidef. neg.

Per Lyaponov $\bar{x}$ (almeno) sempl. stabile

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

back

$$x(t) \in N \Rightarrow x_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \text{cost.} \qquad x(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ c \end{bmatrix} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Per Krasowskii $\bar{x}$ sempl. stabile!

Esercizio 3

extra

$\dot{x} = Fx, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

1. Soluzioni dell'equazione di Lyapunov (se esistono) al variare di α?
2. Stabilità del sistema utilizzando le soluzioni trovate per $\alpha = 4$ e $\alpha = 2$?

back

$$\dot{x} = Fx$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) $F^T P + PF = -Q \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_{11} + 2p_{12} & -p_{12} + 2p_{22} \\ -p_{12} & -p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{11} + 2p_{12} & -p_{12} \\ -p_{12} + 2p_{22} & -p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

back

$$\begin{bmatrix} -2p_{11}+4p_{12} & -2p_{12}+2p_{22} \\ -2p_{12}+2p_{22} & -2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2p_{11}+4p_{12} = -\alpha \\ -2p_{12}+2p_{22} = -2 \\ -2p_{22} = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2p_{11}+8 = -\alpha \implies p_{11} = \dfrac{\alpha+8}{2} \\ -2p_{12}+2 = -2 \implies p_{12} = 2 \\ p_{22} = 1 \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\alpha+8}{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ sol. unica!

back

2) $\alpha = 4$ $\qquad V(x) = x^T P x \qquad \dot{V}(x) = -x^T Q x$

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad m_1 = 6 > 0 \qquad m_2 = \det P = 6-4 > 0 \qquad P \succ 0 \text{ (def. pos.)}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad m_1 = 4 > 0 \qquad m_2 = \det Q = 8-4 > 0 \qquad Q \succ 0 \text{ (def. pos.)}$$

Sistema è asint. stabile!

back

$\underline{\alpha = 2}$

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m_1 = 5 > 0 \\ m_2 = \det P = 5 - 4 > 0 \end{array} \qquad P \succ 0 \quad (\text{def. pos.})$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m_1 = 2 > 0 \\ m_2 = 0 \end{array} \qquad Q \not\succ 0$$

$$\Delta_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4$$

$$\stackrel{!}{=} \lambda^2 + \cancel{4} - 4\lambda - \cancel{4}$$

$$\stackrel{!}{=} \lambda(\lambda - 4) \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 4 \end{array}$$

back

Teorema di Lyapunov sistema (almeno) sempl. stabile

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x^T Q x$ semidef. neg.

$N = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$\forall t$

$x(t) \in N \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -x_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) = 0$

$x_2 = -x_1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = 0$

back

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix} x(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} x(t) = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{\det \neq 0} x(t) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \forall t$$

Per Krasowskii sistema è asint. stabile !